Corrigé de l'examen de Mat122V première session (mardi 22 Mai 2007)

Question de cours

1) a) $a^0 = 1$ et si $n > 0, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}$ (ou défini par la relation de récurrence $a^n = a \cdot a^{n-1}$).

b) De $ba = ab$ il suit, par récurrence sur $l \in \mathbf{N}$ pour tout tel l, la relation a $ba^l = a^l b$ $\quad (*)$.

On a $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$ et, si $0 < k < m$ la relation $\quad \binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} \quad (**)$.

La formule du binôme se montre alors par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$:

si $n = 0$ $(a+b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1\, a^0\, b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}\, b^k$.

Si $n > 0$ alors $(a+b)^n = (a+b)\,(a+b)^{n-1} = (a+b) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^{n-1-j} b^j = (a+b) \sum_{j=0}^{n-1} x_j$.

En développant $(a+b) \sum x_j = a \sum x_j + b \sum x_j = \sum a x_j + \sum b x_j$ et, dans la seconde somme, utilisant[1] $b x_j = \binom{n-1}{j} b a^{n-1-j} b^j = \binom{n-1}{j} a^{n-1-j} b^{j+1}$ et y posant $k = j+1$ on obtient :

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^{n-1-j} b^j + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k =$$

$$= a^n b^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k + a^0 b^n =$$

$$= a^n b^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) a^{n-k} b^k + a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

d'après les formules $(**)$ rappelées ci-dessus.

Problème 1

2) $Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ainsi $Z = Y^2 + 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d'où $\quad ZY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ et $\quad Z \neq 0$.

3) a) Soit $a' \in A$ l'inverse de a on a $aa' = 1$ donc si $ba = 0$ on a $b = b\,1 = b(aa') = (ba)a' = 0$ d'où, par contraposée, si $b \neq 0$ alors $ba \neq 0$.

b) D'après **2)** on peut prendre $A = M_3(\mathbf{R}), b = Z$ et $c = Y$.

c) D'après la contraposée de a) (pour $A = M_3(\mathbf{R}), a = Y$ et $b = Z$), comme $YZ = 0$, la matrice Y n'est pas inversible dans $M_3(\mathbf{R})$.

4) a) $Y^3 + 4Y = (Y^2 + 4I)Y = ZY = 0$ par **2)**.

b) En appliquant **1)** (à $A = M_3(\mathbf{R}), a = X, b = \lambda I \in A$ et $n = 3$ car $X \lambda I = \lambda X = \lambda I X$) on a : $Y^3 = (X - \lambda I)^3 = X^3 - 3\lambda X^2 + 3\lambda X - \lambda^3$ d'où :
$Y^3 + 4Y = X^3 - 3\lambda X^2 + 3\lambda X - \lambda^3 + 4(X - \lambda) = X^3 - 3\lambda X^2 + (3\lambda + 4)X - \lambda^3 - 4\lambda$,
de la forme demandée avec $t_2 = -3\lambda, t_1 = (3\lambda + 4)$ et $t_0 = -\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 4)$.

c) Comme $\lambda^2 + 4 \geq 4$ on a $\lambda^2 + 4 \neq 0$ donc si $\lambda \neq 0$ alors $t_0 = -\lambda(\lambda^2 + 4) \neq 0$ et $I = (-t_0)^{-1}(-t_0 I) = (-t_0^{-1})(X^3 + t_2 X^2 + t_1 X) = -t_0^{-1}(X^2 + t_2 X + t_1 I)X = X(-t_0^{-1}(X^2 + t_2 X + t_1 I))$
donc X est inversible d'inverse

$$X^{-1} = -t_0^{-1}(X^2 + t_2 X + t_1 I) = \frac{1}{\lambda(\lambda^2+4)} X^2 - \frac{3}{\lambda^2+4} X + \frac{3\lambda+4}{\lambda(\lambda^2+4)} I$$

Remarque On n'a pas montré l'unicité de t_0 dans b). Si pour un autre choix $t_0 = 0$ alors $0 = X^3 + t_2 X^2 + t_1 X = (X^2 + t_2 X + t_1 I)X$ donc, comme par c) X est inversible, par la contraposée de **3)** a) on aurait $0 = X^2 + t_2 X + t_1 I = Y^2 + (2\lambda + t_2)Y + (\lambda^2 + t_2 \lambda + t_1)I = 0$, ce qui[2] donnerait $2\lambda + t_2 = 0$, et une contradiction car Y^2 n'est[3] pas multiple de I.

---

[1] par $(*)$ pour $l = n - 1 - j$.
[2] en regardant le terme $(2,1)$.
[3] par la formule de **2)**.

Problème 2

5) On a $f_1'(x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = f_2(x) - f_3(x)$, $f_2'(x) = 2\cos(x)(-\sin(x)) = -2f_1(x)$, et $f_3'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2f_1(x)$ et $g_i'(x) = \lambda e^{\lambda x} f_i(x) + e^{\lambda x} f_i'(x) = \lambda g_i(x) + e^{\lambda x} f_i'(x)$ donc $f_j' = \sum_{i=1}^{3} y_{i,j} f_i, g_j' = \sum_{i=1}^{3} x_{i,j} g_i$ avec si $2 \leq k, l \leq 3, y_{k,l} = 0 = y_{1,1}, y_{2,1} = -y_{3,1} = 1, y_{1,3} = -y_{1,2} = 2$ et $x_{i,i} = \lambda + y_{i,i}$ et pout $i \neq j, x_{i,j} = y_{i,j}$:$(y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}, (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ sont Y et X du problème 1.

6) L'application qui à $g \in W$ associe $g''' + t_2 g'' + t_1 g' + t_0 g$ est linéaire et, dans le système de générateurs (g_1, g_2, g_3) de W, une matrice de cette application est $X^3 + t_2 X^2 + t_1 X + t_0 I = 0$, c'est donc l'application nulle d'où le résultat : pour tout $g \in W$ on a $g''' + t_2 g'' + t_1 g' + t_0 g = 0$.

7) a) Si $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$ sont tels que $g = a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 = 0$ alors $a_2 = g(0) = 0, a_3 = g(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $\frac{1}{2} a_1 = a_1 g_1(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{\pi}{4}) = 0$. Les fonctions g_1, g_2, g_3 sont donc linéairement indépendantes.
b) Si $\lambda = -1$ alors $t_2 = 3, t_1 = 7, t_3 = 5$ l'espace W_λ pour $\lambda = -1$ est, par **6)**, inclus dans l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constant $g''' + 3g'' + 7g' + 5g = 0$. Ce dernier est de dimension 3 et, par a), W est aussi de dimension 3 l'espace des solutions est

$$W_{-1} = \{a_1 e^{-x} \sin(x)\cos(x) + a_2 e^{-x} \cos^2(x) + a_3 e^{-x} \sin^2(x)\,;\,(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R^3}\}$$

Problème 3

8) a) On $a_0 = 0$ et $a_{N+1} = \frac{X}{(1+\epsilon)^{N+1-(N+1)}} = \frac{X}{(1+\epsilon)^0} = X$ et, comme $X > 0, 1 + \epsilon > 1$, la suite $a_k = \frac{X}{(1+\epsilon)^{N+1-k}} = \frac{X(1+\epsilon)^{k-1}}{(1+\epsilon)^N} > 0$ est croissante : D est une subdivision de l'intervalle $[0, X]$.
$a_1 - a_0 = a_1 = \frac{X}{(1+\epsilon)^N}$ et, si $k > 1$ on a

$$a_k - a_{k-1} = \frac{X(1+\epsilon)^{k-1}}{(1+\epsilon)^N} - \frac{X(1+\epsilon)^{k-2}}{(1+\epsilon)^N} = (1 + \epsilon - 1)\frac{X(1+\epsilon)^{k-2}}{(1+\epsilon)^N} = \epsilon\frac{X(1+\epsilon)^{k-2}}{(1+\epsilon)^N}$$

b) $-|^{a_0=0}$ ——$|^{a_1=\frac{16}{9}}$ – $|^{a_2=\frac{8}{3}}$ ——$|^{a_3=4}$ —— $|^{a_4=6}$ ————$|^{a_5=9}$–

9) La fonction $f(x) = x^\beta$ est, car $\beta > 0$, croissante donc $l_D(f) = \sum_{k=1}^{N+1} f(a_{k-1})(a_k - a_{k-1})$ et $L_D(f) = \sum_{k=1}^{N+1} f(a_k)(a_k - a_{k-1})$ et comme $f(a_0) = 0$ et, si $k > 1, f(a_k) = (1 + \epsilon)^\beta f(a_{k-1})$ on a :

$$l_D(f) = \sum_{k=2}^{N+1}\left(\frac{X(1+\epsilon)^{k-2}}{(1+\epsilon)^N}\right)^\beta \epsilon\frac{X(1+\epsilon)^{k-2}}{(1+\epsilon)^N} = \epsilon\frac{X^{\beta+1}}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}}\sum_{k=2}^{N+1}(1+\epsilon)^{(\beta+1)(k-2)}$$

$$L_D(f) = \left(\frac{X}{(1+\epsilon)^N}\right)^\beta \frac{X}{(1+\epsilon)^N} + (1+\epsilon)^\beta l_D(f) = \frac{X^{\beta+1}}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}} + (1+\epsilon)^\beta l_D(f)$$

10) Somme géométrique de raison $(1 + \epsilon)^{\beta+1}$ à N termes, $l_D = \epsilon\frac{X^{\beta+1}}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}}\frac{(1+\epsilon)^{(\beta+1)N} - 1}{(1+\epsilon)^{\beta+1} - 1}$ d'où

$$0 \leq L_D - l_D = \frac{X^{\beta+1}}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}} + \big((1+\epsilon)^\beta - 1\big)\epsilon\frac{X^{\beta+1}}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}}\frac{(1+\epsilon)^{(\beta+1)N} - 1}{(1+\epsilon)^{\beta+1} - 1} \leq$$

$$\leq \frac{X^{\beta+1}}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}} + \epsilon\frac{X^{\beta+1}(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}}\frac{(1+\epsilon)^\beta - 1}{(1+\epsilon)^{\beta+1} - 1} \leq X^{\beta+1}[\frac{1}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}} + \epsilon]$$

b) Si $N \geq \frac{\log(\epsilon^{-1})}{(1+\beta)\log(1+\epsilon)}$ on a $\frac{1}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}} \leq \epsilon$ donc $L_D(f) - l_D(f) \leq 2X^{\beta+1}\epsilon$ tendant vers 0 si ϵ tend vers 0. La différence entre somme de Darboux supérieure et somme de Darboux inférieure de f pouvant être rendue arbitrairement petite, f est intégrable d'intégrale sur $[0, X]$ la limite quand ϵ tend vers 0, si $N = [\frac{\log(\epsilon^{-1})}{(1+\beta)\log(1+\epsilon)}] + 1$, de $l_D(f) = \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{\beta+1} - 1}X^{\beta+1}(1 - (1+\epsilon)^{-(\beta+1)N})$:

$$\int_0^X f(x)dx = \frac{1}{\beta+1}X^{\beta+1}$$

Remarque Si D' : $b_i = i\frac{X}{N}, 0 \leq i \leq N$ on a $L_{D'} - l_{D'} = \frac{X^{\beta+1}}{N^{\beta+1}} \leq \epsilon X^{\beta+1}$ si $N \geq \epsilon^{-\frac{1}{\beta+1}}$ qui est négligeable devant $\frac{\log(\epsilon^{-1})}{(1+\beta)\log(1+\epsilon)}$. Cependant les sommes de Darboux $l_{D'}(f) = \sum_{i=1}^{N}\left((i-1)\frac{X}{N}\right)^\beta\frac{X}{N}$ n'ont pas une expression fermée si simple que les sommes géométriques $l_D(f)$ d'où l'avantage de préférer parfois aux subdivisions régulières D' des subdivisions non régulières comme D.