15 11/12/2006

Rappel $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\boxed{n} \text{ colonnes}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; m lignes

$M_{m,n}$ = {ens. des matrices m×n}

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$; $\boxed{n}$ lignes, p colonnes

malentendu par l'étudiant lundi fait (en accéléré) en cours TD vendredi

$$AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

3 Remarques sur la composition des matrices.

3.1 Rappel

Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est

$$\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_k$$

La transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

est la matrice $A^t = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

Exemple a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ plus généralement $(A^t)^t = A$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

on a donc

$$AB_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = < (a_{i1}, \dots, a_{in}), \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}^t >$$

<u>Proposition</u> Soit $B = (b_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq p}}$ tq $v_1, \dots, v_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}, \dots, v_p$

vérifient $1 \leq k \neq l \leq p$ $< v_k^t, v_l^t > = 0$ $< v_k^t, v_k^t > = 1$

(les colonnes de B sont deux à deux orthogonales et de norme 1)

$$\text{Alors} \quad B^t B = I_p$$

preuve $B^t = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ $\quad (b_{k1}, \dots, b_{kn}) = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}^t = v_k^t$

et $(B^t B)_{kl} = < v_k^t, v_l^t > = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$

donc $B^t B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{p} \Big\} p = I_p$

<u>Corollaire</u> Soit B comme dans la proposition alors $p \leq n$

et si $p = n$ on a aussi $B B^t = I_n$ $\circ\!/\!\circ$

B^t a ses colonnes deux à deux orthogonales et de norme 1 pv Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ les applications linéaires associées à B et B^t on a $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^p}$

comme $Id_{\mathbb{R}^p}$ est injective on a f injective

donc $p = \dim \mathbb{R}^p \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

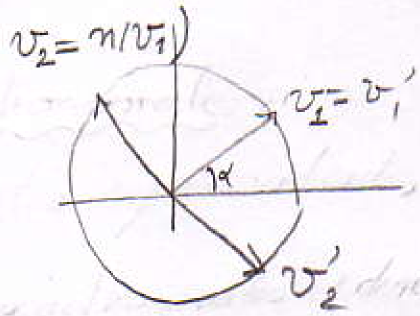
Si $p = n$ f est un isomorphisme ~~et f^{-1} est l'isomorphisme réciproque~~

$$g = g \circ Id_{\mathbb{R}^n} = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} = f^{-1}$$

d'où $B B^t$ est la matrice de $f \circ g = f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$

c.a.d $\quad B B^t = I_n$

<u>Exemples</u> a) $B = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}} \end{array}$



$$B^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

b) $B' = \begin{array}{cc} v_1' & v_2' \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}} \end{array} \qquad B'^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

<u>Rmq</u> $B'^t = B'$ donc $B'^2 = B'^t B = I_2$

c) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\square$

d] plus généralement matrice de permutation :

(1) dans chaque colonne tous les termes nuls sauf un qui vaut 1

(2) — ligne —

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ (1) définit $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$\forall j \quad a_{\sigma(j) j} = 1$ et $i \neq \sigma(j) \quad a_{ij} = 0$

(2) assure que σ est surjective :

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \exists j \in \{1, \dots, n\} \quad a_{ij} = 1$ donc $i = \sigma(j)$.

une matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie l'une des quatre propriétés équivalentes

(1) les colonnes de B sont deux à deux orthogonales de norme 1

(2) $B^t B = I_n$ (3) $B B^t = I_n$

(4) les lignes de B sont deux à deux orthogonales et de norme 1

Remarque (Exercice après le lemme suivant) sont aussi équivalents

(5) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad \langle f_B(u), f_B(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

(5') $\forall u \in \mathbb{R}^n \quad \|f_B(u)\|^2 = \langle f_B(u), f_B(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$

Lemme Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Alors $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

pr $(B^t \cdot A^t)_{k,i} = \sum_{j=1}^{n} B^t_{kj} A^t_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = (AB)_{ik} = (AB)^t_{ki}$

□

Corollaire Soit $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ orthogonales alors AB est orthogonale

$$\text{or } (AB)^t AB = (B^t A^t) AB = B^t (A^t A) B = B^t I_n B = B^t B = I_n \quad \square$$

3.2 $\quad 1 \leq r \neq s \leq n \qquad E_{rs} = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$$x_{rs} = 1 \qquad i \neq r \text{ ou } j \neq s \quad x_{ij} = 0$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot E_{rs} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} & a_{1r} & \\ 0 & a_{ir} & 0 \\ & a_{mr} & \end{bmatrix}$$

$$E_{rs} B = \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ b_{s1} & \cdots & b_{sp} \\ & 0 & \end{bmatrix} \leftarrow r$$

$$\text{donc } (I_n + x E_{rs}) B = B + \begin{bmatrix} & 0 & \\ x b_{s1} & \cdots & x b_{sp} \\ & 0 & \end{bmatrix} \leftarrow r$$

est la matrice obtenue en ajoutant x fois la s^{ieme} ligne de B à la r^{ieme} ligne de B.

$$A (I_n + x E_{rs}) = A + \begin{bmatrix} & x a_{1r} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & x a_{mr} & \end{bmatrix}$$

est la matrice obtenue en ajoutant x fois la r^{ieme} colonne de A à la s^{ieme} colonne de A

4 Rang d'une matrice

def Le rang d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est le rang de l'application linéaire $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associée, c'est donc le rang de la famille $v_1, \dots, v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ de ses colonnes

Rmq on aurait pu aussi le définir comme le rang de $u_1, \dots, u_i = (a_{i1}, \dots, a_{im}), \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ de ses lignes, c.a.d. le rang (de colonne) de $A^t = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

Théorème Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

$$rg\, A = rg\, A^t$$

pv on écrit les scalaires à gauche pour les lignes et à droite pour les colonnes

Affirmation 1 (notations ci-dessus)

$$rg\, A = rg(v_1, \dots, v_n) \leqslant rg(u_1, \dots, u_m) = rg\, A^t$$

En appliquant cette égalité à A^t (et en utilisant que comme la $\times$ de $\mathbb{R}$ est commutative il est indifferent de mettre les scalaires à gauche ou à droite des lignes et des colonnes)

on a $rg\, A^t \leq rg((A^t)^t = A)$ d'où $rg\, A = rg\, A^t$ $\square$

<u>preuve de l'affirmation</u> Soit $r = rg(u_1, \ldots, u_m)$ et

$\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ une permutation tq $u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(r)}$ est

une base de $Vect(u_1, \ldots, u_m)$

comme $\dim Vect(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(m)}) = \dim Vect(u_1, \ldots, u_m) = rg\, A^t$

et $rg(M_\sigma \circ A) = rg(f_\sigma \circ f_A) = rg(f_A) = \dim(v_1, \ldots, v_n) = rg\, A$

on peut supposer (quitte à remplacer A par $M_\sigma \circ A$) que

$u_1, \ldots, u_r$ est une base de $Vect(u_1, \ldots, u_m)$

pour $r < i \leq m$ $\quad u_i = \sum_{s=1}^{r} x_{is}\, u_s$

Soit $w_1, \ldots, w_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{rj} \end{pmatrix}, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^r$ les vecteurs obtenus

en ne gardant que les r premières coordonnées des

$v_1, \ldots, v_n$

<u>Affirmation 2</u> $\quad rg(v_1, \ldots, v_n) = rg(w_1, \ldots, w_n) \; (\leq r)$

preuve il suffit de prouver $\sum_{j=1}^{n} w_j\, y_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j\, y_j = 0$

donc Si $\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot y_j = 0$ c.a.d.

$1 \leq s \leq r \quad \sum_{j=1}^{n} a_{sj}\, y_j = 0$ alors $r < i \leq n \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = 0$

mais $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{r} x_{is}\, a_{sj}\, y_j = \sum_{s=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} x_{is} \cdot a_{sj}\, y_j$

$= \sum_{s=1}^{r} x_{is} \sum_{j=1}^{n} a_{sj}\, y_j = \sum_{s=1}^{r} x_{is} \times 0 = 0$!! $\square$

esquissé en fin d'ID

5 Changement de base

Soit $v_1, \dots, v_n \in E$ une base d'un espace vectoriel E

$u_1, \dots, u_m \in F$ ——————— F

Rappel les applications $\varphi_u : \mathbb{R}^m \to F$, $\varphi_u(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i$

$\varphi_v : \mathbb{R}^n \to E$, $\varphi_v(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ sont des isomorphismes

Soit $f : E \to F$ une application linéaire

définition La matrice de f relativement aux bases $v_1, \dots, v_n \in E$ et $u_1, \dots, u_m \in F$ est la matrice de

$$\varphi_u^{-1} \circ f \circ \varphi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle \varphi_v}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_u^{-1}} \\ \mathbb{R}^n & \text{———} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Proposition Soit $v'_1, \dots, v'_n \in E$, $u'_1, \dots, u'_m \in F$ deux autres bases de E et F. On note P la matrice de $\varphi_v^{-1} \circ \varphi_{v'}$ et Q celle de $\varphi_u^{-1} \circ \varphi_{u'}$

$$\left[v'_j = \sum_{s=1}^{n} a_{js} v_s \ , \quad u'_i = \sum_{r=1}^{m} a_{is} u_s \right]$$

Alors les matrices M et M' de f relativement aux base $v_1, \dots, v_n \in E$ et $u_1, \dots, u_m \in F$ et $v'_1, \dots, v'_n \in E$; $u'_1, \dots, u'_m \in F$ vérifient la relation $M' = Q^{-1} M P$

pr : $\varphi_{u'}^{-1} \circ f \circ \varphi_{v'} = \varphi_{u'}^{-1} \circ (\varphi_u \circ \varphi_u^{-1}) \circ f \circ (\varphi_v \circ \varphi_v^{-1}) \circ \varphi_{v'} = (\varphi_{u'}^{-1} \circ \varphi_u) \circ (\varphi_u^{-1} \circ f \circ \varphi_v) \circ (\varphi_v^{-1} \circ \varphi_{v'})$

$= (\varphi_u^{-1} \circ \varphi_{u'})^{-1} \circ (\varphi_u^{-1} \circ f \circ \varphi_v) \circ (\varphi_v^{-1} \circ \varphi_{v'})$ □