04/12/2006

Espaces affines

1 Exemples et définition

a) $\mathcal{S}_{(a,b,c)} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} x+y+2z=a \\ x+2y+3z=b \\ x-2y-z=c \end{cases} \right\}$ $\quad S = \left\{ (s,t,u) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} s+t+2u=0 \\ s+2t+3u=0 \\ s-2t-u=0 \end{cases} \right\}$

ens. des sol^{n} du système linéaire — ens. des sol^{n} du système homogène associé

S est un sous-e.v. de $\mathbb{R}^3$, mais si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ $\mathcal{S}_{(a,b,c)}$ n'est pas un sous-e.v. de $\mathbb{R}^3$ [car $0 \notin \mathcal{S}_{(a,b,c)}$]

si $M = (x,y,z) \in \mathcal{S}_{(a,b,c)}$ et $v = (s,t,u) \in S$ alors $M + v \in \mathcal{S}_{(a,b,c)}$
$[= (x+s, y+t, z+u)]$

et si $M' = (x',y',z') \in \mathcal{S}_{(a,b,c)}$ $\exists!\, v \in S$ tq $M' = M + v$ $[v = (-x+x', -y+y', -z+z')]$
il existe un unique

Rmq $(1,0,0) \in \mathcal{S}_{(1,1,1)}$ donc $\mathcal{S}_{(1,1,1)} \neq \emptyset$

si $(x,y,z) \in \mathcal{S}_{(a,b,c)}$ alors $0 = 3(b-a)+c$ [équation de compatibilité du système] donc $\mathcal{S}_{(0,0,1)} = \emptyset$

b) $f : E \to F$ application linéaire d'un e.v. E dans un e.v. F et $y \in F$

$\mathcal{A}_y = f^{-1}(\{y\}) = \{ x \in E ; f(x) = y \}$; $V = \ker f$ $\left(= f^{-1}(\{0\}) \right)$

V est un sous-e.v. de E, mais si $y \neq 0$ $\mathcal{A}_y$ n'est pas un sous-e.v. de E

(i) $\forall x \in \mathcal{A}_y$ $\forall v \in V$ $x + v \in \mathcal{A}_y$ $\left[f(x+v) = \underbrace{f(x)}_{= y,\ x \in f^{-1}(\{y\})} + \underbrace{f(v)}_{= 0,\ v \in \ker f} = y \right]$

(ii) $\forall x, x' \in \mathcal{A}_y$ $\exists!\, v \in V$ t.q. $x' = x + v$ $[v = -x + x']$

$\mathcal{A}_y \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in \operatorname{Im} f$

a] est un cas particulier de b] : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

définie par ses valeurs sur la base canonique (on écrit les vecteurs du b.l.t en colonne)

$f(e_1) = v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $f(e_2) = v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $f(e_3) = v_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$f(x,y,z) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3$

Comme $v_3 = v_1 + v_2$ et v_1, v_2 libre [par exemple car $v_1 \neq 0$ et v_2 non multiple de v_1]

$2 = rg(v_1, v_2, v_3) = rg(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$

Si $a=b=c=1$ $y = v_1 = f(e_1) \in \operatorname{Im} f$ donc $\mathcal{A}_y = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

La méthode de Gauss donne $\operatorname{Im} f = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; 2(b-a)+c=0\} \not\ni (0,0,1)$

$\ker f = \{(x, x, -x) ; x \in \mathbb{R}\}$

[$(x,y,z) \in \ker f \iff \begin{cases} x+y+2z = 0 & (a) \\ 0x + y + z = 0 & (b-a) \\ 0x + 0y + 0z = 0 & (2(b-a)+c) \end{cases} \iff \begin{cases} x + 0 \cdot y + z = 0 & (2a-b) \\ 0 \cdot x + y + z = 0 & (b-a) \end{cases}$ (si $2(b-a)+c=0$)]

<u>définition</u> Un espace <u>affine</u> est la donnée de $(\mathcal{A}, V, \dotplus)$ où

$\mathcal{A}$ est un ensemble (de points), V est un e.v., $\dotplus : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ t.q.

[$M \in \mathcal{A}$ M est un point de $\mathcal{A}$]

(0) $\mathcal{A} \neq \emptyset$

(1) $\forall M \in \mathcal{A}$ $\forall v, v' \in V$ $(M \dotplus v) \dotplus v' = M \dotplus (v + v')$ + de V

(2) $\forall M \in \mathcal{A}$. $a\dotplus : V \to \mathcal{A}$ $v \mapsto M \dotplus v$ est bijective

[$\forall M' \in \mathcal{A}$ $\exists! v \in V$ tq $M \dotplus v = M'$]

surjectif injectif

Par abus on dit un espace affine $\mathcal{A}$ au lieu de $(\mathcal{A}, V, \dot{+})$
[comme on dit un espace vectoriel E au lieu de $(E, +: E\times E \to E, \cdot\, \mathbb{R}\times E \to E)$

Remarques a) à cause de (1) on écrit $+$ au lieu de $\dot{+}$

b) $\big((0)$ et (1) et $(2)\big) \Leftrightarrow \big((1)$ et $(2') : \exists M \in \mathcal{A}$ tq $M + : V \to \mathcal{A}$ est bijective$\big)$

$0 \in V$ donc $V \neq \emptyset$ et si il y a une bijection de V sur $\mathcal{A}$ alors $\mathcal{A} \neq \emptyset$

$(2')$ assure l'existence d'une telle bijection mais pas (2) si $\mathcal{A} = \emptyset$!

Il suffit donc de montrer (1) et $(2') \Rightarrow (2)$

Soit $M' \in \mathcal{A}$ par $(2')$ (la surjectivité ici suffit) $\exists v \in V$ tq $M' = M \dot{+} v$

donc $\forall v \in V \quad v' \mapsto M' \dot{+} v' = (M + v) \dot{+} v' \underset{(1)}{=} M \dot{+} (v + v')$

est composée de $v' \mapsto v + v'$ bijective de V dans V (d'inverse $v'' \mapsto -v + v''$)

et de $v'' \mapsto a \dot{+} v''$ bijective par $(2')$ donc bijective. □

Proposition 1 (Exercice*) $\forall M \in \mathcal{A} \quad M \dot{+} 0 = M$

Notation $\forall M, M' \in \mathcal{A}$ on note $\overrightarrow{MM'}$ l'unique $v \in V$ t.q. $M' = M \dot{+} v$

$$(*) \qquad M' = M \dot{+} \overrightarrow{MM'} \ (\text{ou } M + \overrightarrow{MM'})$$

Proposition 2 $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ on a la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

pv comme $v \mapsto A \dot{+} v$ est bijective il suffit de prouver

$$\begin{array}{ccccc} A \dot{+} \overrightarrow{AC} & \overset{?}{=} & & & A \dot{+} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ (*) \| & & & & \| (1) \\ C & \underset{(*)}{=} & B \dot{+} \overrightarrow{BC} & \underset{(*)}{=} & (A \dot{+} \overrightarrow{AB}) \dot{+} \overrightarrow{BC} \end{array}$$

Exercice $\forall v, v' \in V$ $t_v : A \to A$ $t_v(M) = M \dot{+} v$; $t_0 = Id_A$; $t_{v+v'} = t_v \circ t_{v'}$

donc t_v est bijective la translation de vecteur v (d'inverse $t_v^{-1} = t_{-v}$)

V est l'espace de direction (ou des translations) de l'espace affine A.

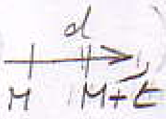
Rmq. Si E est un e.v. alors ($\mathcal{E}$=E, E, $\dot{+}$=+) est un espace affine

"considérer un e.v. comme espace affine revient à oublier son O"

analogie sur une règle graduée

on peut parler des points correspondant à $-2, 1, 3, \pi \in \mathbb{R}$

Si la graduation est effacée (mais on connait son sens



et on peut mesurer les longueurs) on peut si $M \in d$ et $t \in \mathbb{R}$ parler de $M+t$: le point N tq $d(M,N) = |t|$
et N après M si $t > 0$
avant — $t < 0$

Autre exemple l'altitude (s'il n'y avait pas de marées on pourrait prendre le niveau de la mer comme 0!)

Un sous-espace affine d'un espace affine ($\mathcal{A}$, V, $\dot{+}$) est une partie non vide $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset A$ t.q il y a un sous-ev $U \subset V$ t.q.

(1) $\forall B \in \mathcal{B}$ $\forall u \in U$ $B \dot{+} u \in \mathcal{B}$
(2) $\forall B, B' \in \mathcal{B}$ $\overrightarrow{BB'} \in U$

Si U est de dimension finie on dit que $\mathcal{B}$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{B} = \dim U$

$\dim \mathcal{B} = 0 \Leftrightarrow V = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{B} = \{B\}$ un point de A
$\dim \mathcal{B} = 1 \Leftrightarrow V = \{t.v ; v \neq 0, t \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow \mathcal{B} = \{\underbrace{B \dot{+} t.v}_{\text{représentation paramétrique}} ; t \in \mathbb{R}\}$ droite de A

Proposition 3 (Exercice) Soit $A \in \mathcal{A}$ et U un sous-espace de V alors il y a un unique sous-espace affine contenant A et de direction U c'est $A \dot{+} U = \{A \dot{+} u ; u \in U\}$

2 Barycentres

<u>Théorème</u> Soit $\mathcal{A}$ un espace affine $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{A}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \neq 0$ alors il y a un unique $G \in \mathcal{A}$ tq

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = 0$$

c'est le barycentre de la famille pondérée $(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n)$

PV Soit $O \in \mathcal{A}$ alors $\forall G \in \mathcal{A}$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{GM_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_k}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{GO} + \lambda_k \cdot \overrightarrow{OM_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{GO} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{OM_i} = \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_i}_{=\sigma}\Big) \cdot \overrightarrow{GO} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{OM_k}$$

donc $0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{GM_k} \iff 0 = \sigma \overrightarrow{GO} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{OM_k} \iff \overrightarrow{GO} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\sigma} \cdot \overrightarrow{OM_k} = 0$

$$\iff \overrightarrow{OG} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\sigma} \cdot \overrightarrow{OM_k} \qquad \square$$

<u>Notation</u> quand $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ $(\sigma = 1)$ on note $G = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_k$

[un abus pour $G = O \dotplus \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{OM_k}$ donné par la formule de la preuve puisque $\sigma = 1$]

⚠ $O \dotplus \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{OM_k}$ ne dépend pas du choix du point O que sous l'hypothèse $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ car si $O, O' \in \mathcal{A}$

$$O \dotplus \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{OM_k} \stackrel{?}{=} O' \dotplus \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overrightarrow{O'M_k} = O' \dotplus \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_k}) = O' \dotplus \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big) \cdot \overrightarrow{O'O} \dotplus \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{OM_k}$$

$$\iff O \stackrel{?}{=} O' \dotplus \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big) \overrightarrow{O'O} \iff \overrightarrow{O'O} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big) \cdot \overrightarrow{O'O} \iff \begin{cases} \overrightarrow{O'O} = 0 \\ \text{ou } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \end{cases}$$

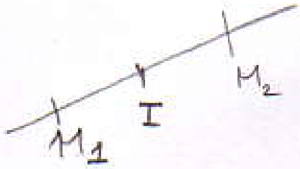
$\square$

Cas de deux points M_1, M_2 $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=1-\lambda$

$$\overrightarrow{M_1\,\lambda M_1+(1-\lambda).M_2} = \lambda.\overrightarrow{M_1M_1} + (1-\lambda).\overrightarrow{M_1M_2} = (1-\lambda).\overrightarrow{M_1M_2}$$

donc soit $M_1=M_2$ et $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda M_1+(1-\lambda)M_2=M_1$

soit $M_1\neq M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$ et $\lambda\mapsto\lambda M_1+(1-\lambda).M_2$ décrit la droite passant par M_1 et de direction $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{M_1M_2})$



<u>Remarques</u> a) $1.M_1+(1-1).M_2 = M_1$

$0.M_1+(1-0).M_2 = M_2$

b) $\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2 = I$ est le milieu de M_1M_2

$$\overrightarrow{IM_1}+\overrightarrow{IM_2}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_1}=-\overrightarrow{IM_2}=\overrightarrow{M_2I} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_2}=\overrightarrow{M_1I}$$

c) $\lambda.M_1+(1-\lambda)M_2$ est plus près de M_1 que de $M_2 \Leftrightarrow \lambda>\frac{1}{2}$

<u>Proposition</u> (admise) Soit $\emptyset\neq\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ une partie non vide d'un espace affine alors sont éq^n

(1) $\mathcal{B}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{A}$

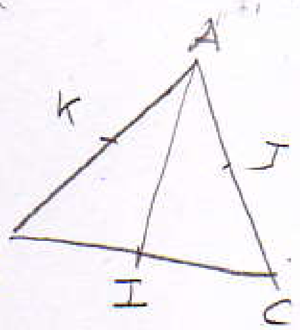
$\Downarrow$

(*) (2) $\forall n\geqslant 1$ $B_1,\dots,B_n\in\mathcal{B}$; $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$ $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.B_k\in\mathcal{B}$

$\Downarrow$

(3) $\forall A,B\in\mathcal{B}$ $\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda.A+(1-\lambda).B\in\mathcal{B}$

<u>Exemple</u> $A, B, C\in\mathcal{A}$



$I=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$ milieu de BC

$$\frac{2}{3}.I+\frac{1}{3}.A = O\dot{+}\left(\frac{2}{3}.\overrightarrow{OI}+\frac{1}{3}.\overrightarrow{OA}\right) = O\dot{+}\left(\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{3}.\overrightarrow{OA}\right)$$

$$= O\dot{+}\left(\frac{1}{3}.\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}.\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}.\overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}.B+\frac{1}{3}.C+\frac{1}{3}.A = G$$ (symétrique en A, B, C)

fin 04/12/06

donc les trois médianes d'un triangle se coupent en l'isobarycentre des sommets

Matrices

1 Dictionaire (applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$) $\Leftrightarrow$ (matrices $m \times n$)

deux notations pour les n-uplets (élements de $\mathbb{R}^n$)

- en ligne $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

  ex $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \times 2 + x_2 \times 3,\ x_1 - x_3)$

- en colonne $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

ex Le système $\begin{cases} x_1 \times 2 + x_2 \times 3 + x_3 \times 0 = a \\ x_1 \times 1 + x_2 \times 0 + x_3 \times (-1) = b \end{cases}$

(équivalent à $f(x_1, x_2, x_3) = v \overset{def}{=} (a, b)$)

est interpreté par la méthode de Gauss comme la relation linéaire

$$0 = x_1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{4} x_k \cdot v_k \quad (x_4 = -1)$$

entre les colonnes $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_4 = v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Rappels a) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ (écrite en colonne) est

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underset{1 < k < n}{e_k} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} k-1 \text{ zéros} \\ 1 \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n-k \text{ zéros} \end{pmatrix}, \dots, e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_k \cdot e_k + \dots + x_n \cdot e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

b] Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est uniquement déterminée par ses valeurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sur la base canonique.

Definition • Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire t. q. pour $1 \leq j \leq n$

$$f(e_j) = v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

la matrice de f est $A_f = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix}$

est le tableau à m lignes et n colonnes de nombres réels dont l'élément à la i^{ieme} ligne et j^{ieme} colonne est la $i^{ème}$ coordonnée a_{ij} de $v_j = f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{ij} \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ l'image par f de e_j

[la $j^{ième}$ colonne de A_f est donc le vecteur $v_j = f(e_j)$]

c'est une matrice $m \times n$

• Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice $m \times n$

L'application linéaire associée à A est $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniquement déterminée par ~~ses~~ valeurs

$1 \leq j \leq n$ $\quad f_A(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ (elle envoit le $j^{ième}$ vecteur e_j de la base can. sur la $j^{ième}$ colonne de A)

Exemples 1) La matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_3)$

est $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ car $f(e_1) = f(1,0,0) = (2,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (3,0)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1)$

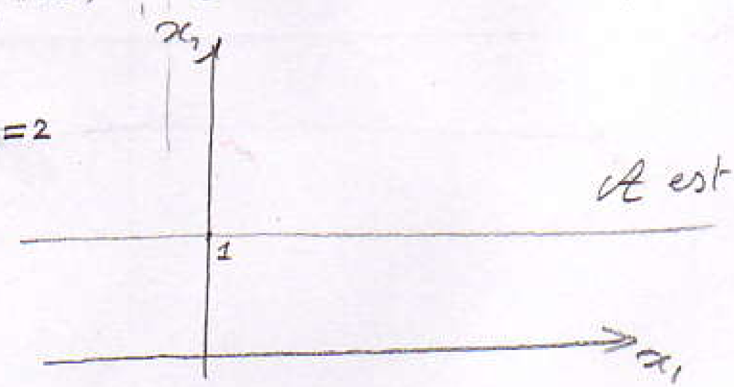
2) Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ une application linéaire

qui conserve l'espace affine

$\mathcal{A} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_{n+1} = 1\} = p^{-1}(\{1\})$ (où $p = pr_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1}$).

$f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{A}$ on a $f(x) \in \mathcal{A}$

cas $n+1 = 2$



$\mathcal{A}$ est la "droite horizontale" d'équation $x_2 = 1$

- $e_{n+1} \in \mathcal{A}$ et $\forall x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \ker p$ on a $e_{n+1} + x \in \mathcal{A}$

[car $p(e_{n+1} + x) = \underset{1}{\underset{\parallel}{p(e_{n+1})}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{p(x)}}$]

donc si $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ on a $p(f(e_{n+1})) = 1 = p(f(e_{n+1} + x)) = p(f(e_{n+1})) + p(f(x))$

d'où $p(f(x)) = p(f(e_{n+1})) - p(f(e_{n+1})) = 0$ c.a.d. $f(x) \in \ker p$.

donc f induit $f_1 : \underset{\mathbb{R}^n \times \{0\} = \ker p}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}^n}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n \times \{0\} = \ker p}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}^n}}$

on note $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ la matrice de $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

• $P(f(e_{n+1}) - e_{n+1}) = P(f(e_{n+1})) - P(e_{n+1}) = 1 - 1 = 0$

donc $b = f(e_{n+1}) - e_{n+1} \in \ker P = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

et $f(e_{n+1}) = e_{n+1} + b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ 1 \end{pmatrix}$

et $M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & & a_{nn} & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$

cas $n+1 = 2$: $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

où $A = M_{f_1}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

3) La colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une matrice $n \times 1$, celle de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \; f(t) = \begin{pmatrix} t x_1 \\ \vdots \\ t x_n \end{pmatrix} = t . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

[uniquement déterminée par $f(1) = f(e_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $e_1 = 1$ base canonique de $\mathbb{R}$]

4) $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ correspond à $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

2. Composition des matrices

Soit m, n, p des entiers positifs

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice $m \times n$

$B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ une matrice $n \times p$

Elles correspondent à $f_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

qui sont composables $\mathbb{R}^p \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m$

<u>définition</u> Le produit de A et B est la matrice $A \cdot B$ (qui est $m \times p$)

correspondant à la composée $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$

- cas particulier $p = 1$ donc $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est une colonne

et AB correspond à $t \mapsto f_A \circ f_B(t) = f_A(f_B(t)) = f_A(t f_B(1)) = f_A(tB) = t f_A(B)$

c'est donc l'image par f_A de la colonne $B = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot e_j$

d'où $A \cdot B = f_A\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot f_A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_j \times a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_j \times a_{mj} \end{pmatrix}$$

- Comme dans le cas général $p \geq 1$ on a

$$A \cdot B = f_A \circ f_B(e_1) \dots f_A \circ f_B(e_p) = f_A(f_B(e_1)) \dots f_A(f_B(e_p))$$

et pour $1 \leq k \leq p$ $f_B(e_k) = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$ est la $k^{ième}$ colonne de B on a

le terme à la $i^{ième}$ ligne et $k^{ième}$ colonne de $A \cdot B$ est

$$AB_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \times a_{ij}$$

La formule est plus visuelle en l'écrivant

$$\left(a_{i1},\dots,a_{in}\right)\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \boxed{AB_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times b_{jk}}$$

et c'est ainsi que l'on l'utilise et l'apprend.

Remarque

Cela revient pour les espaces $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ de colonnes à écrire les scalaires à droite

$$\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \cdot \lambda} = \begin{pmatrix} x_1 \times \lambda \\ \vdots \\ x_m \times \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times x_1 \\ \vdots \\ \lambda \times x_m \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}$$

car $\times$ ds $\mathbb{R}$ est commutative

au lieu de

c'est ce que l'on fait (sans le dire) quand on écrit les système

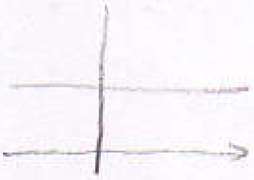
plutôt que

$$\begin{cases} x_1 \times 2 + x_2 \times 3 = a \\ x_1 \times 1 + x_2 \times (-1) = b \end{cases}$$

on est habitué à écrire

$$\begin{cases} 2 \times x_1 + 3 \times x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \end{cases}$$

Exemples a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [f_A conserve la d^{te} $\mathcal{A} = \{x_2 = 1\}$)



$B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ [la colonne B représente $(x,1) \in \mathcal{A}$]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b\times 1 \\ 0x + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rmq $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f'(x) = a'x + b'$

$$f \circ f'(x) = f(f'(x)) = f(a'x + b') = a(a'x + b') + b$$

$$= (aa')x + ab' + b$$

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det(A) \cdot I_2$$

Exercice $BA = \det(A) \cdot I_2$

<u>Rappel</u> Si $f, g : E \to F$ sont linéaires et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors (comme $\times$ de $\mathbb{R}$ est commutative) $\lambda f + \mu g : E \to F$ est linéaire
$x \mapsto \lambda . f(x) + \mu g(x)$

En prenant $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

la matrice de $\lambda . f + \mu g$ est $\lambda A + \mu . B \overset{\text{déf}}{=} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Ainsi l'ensemble des matrices $m \times n$ est un espace vectoriel (isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ celui des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$) et de dimension $m \times n$ [il y a $m \times n$ coordonnées a_{ij}]

$$\underline{\text{d'l}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

$\#$ si $ca \neq 0$

$$\text{mais} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ ca+b & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{d'l}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\#$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$