27/11/2006

Un exemple $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x_1;\dots;x_4) = \sum_{k=1}^{4} x_k \quad (= x_1+x_2+x_3+x_4)$

est linéaire $E = \ker f = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

sous-e.v.

$v_1 = (1,-1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$, $v_3 = (1,0,-1,0)$, $v_4 = (0,0,1,-1)$,

$v_5 = (0,1,0,-1)$, $v_6 = (1,0,0,-1) \in E \supset F = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)$

$\mathbb{R}^4 \supset \mathbb{R}^2\times\{0\}\times\{0\}$ $\quad \mathbb{R}^3\times\{0\}$ $\quad v_4 \notin \mathbb{R}^3\times\{0\}$ $\quad v_6 = v_1+v_2+v_4 \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_5)$

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1) \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1,v_2) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3) \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4) = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_5) = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_6)$$

$v_1 \neq 0$ $\quad v_2 \notin \mathbb{R}^2\times\{0\}\times\{0\}$ $\quad v_3 = v_1+v_2 \in \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ $\quad v_5 = v_2+v_4 \in \mathrm{Vect}(v_1;\dots;v_4)$

donc v_1, v_2, v_4 est une base de F et

car $E \subsetneq \mathbb{R}^4$ puisque $(1,0,0,0) \notin E$

$$3 = \dim F \leq \dim E < \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

car $F \subset E$ puisque $v_1,\dots,v_6 \in E$

donc $3 = \dim F = \dim E$ et (comme $F \subset E$) on a $F = E$

Ainsi v_1, v_2, v_4 est une base de E

Exercice Prouver directement

a) Si $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ $\quad u = x_3 \cdot v_4 + x_2 \cdot v_5 + x_1 \cdot v_6$

b) En déduire que v_1, v_2, v_4 engendrent E.

c) Prouver que v_4, v_5, v_6 et v_1, v_2, v_4 sont des familles libres

---

Rappels Soit E un espace vectoriel, $0 < n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in E$ (une famille de n vecteurs de E)

① $g = g_{\underline{v}} : \mathbb{R}^n \to E$, $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k$ est linéaire

② $v_1, \dots, v_n \in E$ est génératrice $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $g_{\underline{v}}$ est surjective

$\boxed{3}$ Si $E \neq \{0\}$ a une famille génératrice alors E a une base $b_1, \dots, b_n$ $\quad \dim E = n$
(famille libre et génératrice)

$\boxed{4}$ $v_1, \dots, v_n \in E$ est libre $\boxed{\Leftrightarrow}$ $g_{\underline{v}}$ est injective

Donc $b_1, \dots, b_n \in E$ est une base de E ssi $g_{\underline{b}} : \mathbb{R}^n \to E$ est isomorphisme
(donc bijective et $g_{\underline{b}}^{-1} : E \to \mathbb{R}^n$ linéaire)

Si $b_1, \dots, b_n$ base de E et $\underbrace{g_{\underline{b}}(x_1, \dots, x_n)}_{\text{(la famille des)}} = u$ $\quad \left[\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = g_{\underline{b}}^{-1}(u)\right]$

on dit que $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées de u dans la base $b_1, \dots, b_n$.

<u>Proposition</u> Soit E un e.v. de dimension $n>0$ et $b_1, \dots, b_n \in E$ une base de E

Alors si F est un (autre) e.v. et $v_1, \dots, v_n \in F$ il y a une unique application linéaire

$$f : E \to F \quad t.q. \quad 1 \leq k \leq n \quad f(b_k) = v_k$$

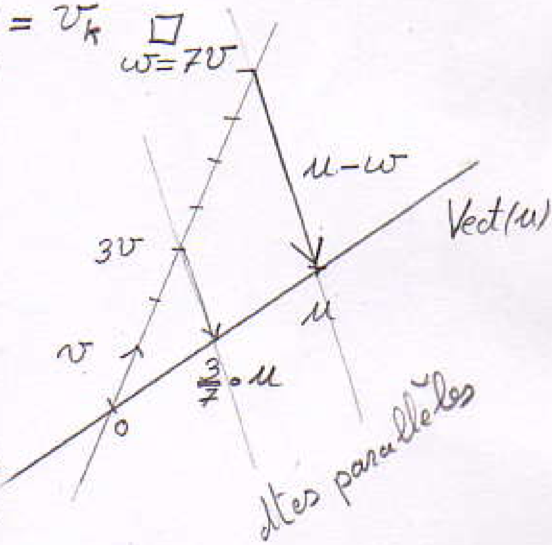
pv. unicité. Soit une telle f et $u \in E$ soit $(x_1, \dots, x_n) = g_{\underline{b}}^{-1}(u)$

$$u = g_{\underline{b}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot b_k \text{ donc } f(u) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot b_k\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ linéaire}}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot f(b_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k \ \square$$

existence $g_{\underline{b}}^{-1} : E \to \mathbb{R}^n$ et $g_{\underline{v}} : \mathbb{R}^n \to F$ sont linéaires donc $g_{\underline{v}} \circ g_{\underline{b}}^{-1} : E \to F$

est linéaire et $g_{\underline{v}} \circ g_{\underline{b}}^{-1}(u) = g_{\underline{v}}(g_{\underline{b}}^{-1}(u)) = g_{\underline{v}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$

en particulier $g_{\underline{v}} \circ g_{\underline{b}}^{-1}(b_k) = g_{\underline{v}}(g_{\underline{b}}^{-1}(b_k)) = g_{\underline{v}}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1\ 0}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k\ 0}) = v_k \ \square$



<u>Exemple</u> $0 \neq u \in \mathbb{R}^2 \ni v \notin \text{Vect}(u)$

$w = 7 \cdot v$; $u, w \in \mathbb{R}^2$ libre

$2 = \dim \text{Vect}(u, w) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc

donc $\text{Vect}(u, w) = \mathbb{R}^2$ et u, w base de $\mathbb{R}^2$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unique morphisme tq $f(u) = u$ et $f(w) = u$

- $\text{Im} f = \text{Vect}(f(u), f(w)) = \text{Vect}(u, u) = \text{Vect}(u)$
- $v = \frac{1}{7} \cdot (7 \cdot v) = \frac{1}{7} \cdot w$ donc $3 \cdot v = \frac{3}{7} \cdot w$ et $f(3 \cdot v) = f(\frac{3}{7} \cdot w) = \frac{3}{7} \cdot f(w) =$ $\boxed{= \frac{3}{7} \cdot u}$
- $0 < \dim \ker f < \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc $\dim \ker(f) = 1$

car $0 \neq w - u \in \ker f$ (car $f(u) = u \neq 0$ donc $u \notin \ker f$)

$[f(w-u) = f(w) - f(u) = u - u = 0]$ et $\ker f = \text{Vect}(w - u) = \text{Vect}(3 \cdot v - \frac{3}{7} \cdot u)$

d'où une construction exacte de $\frac{3}{7} \cdot u$ à partir de u

"à la règle et au compas"

6 Le théorème du rang

Théorème Soit E un e.v. de dimension finie, F un e.v. et $f : E \to F$ linéaire

(1) $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont de dimension finie

(2) $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$

pv. (1) $\ker f$ sous-e.v. de E de dim. finie est de dim. finie
Si $E = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est finiment engendré donc de dimension finie.

(2) a) $\ker f = \{0\}$ alors $f : E \to F$ injective

donc $f_1 : E \to \operatorname{Im} f$ $f_1(x) = f(x)$ linéaire bijective donc isomorphisme

et $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 0 + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

b) $\operatorname{Im} f = \{0\}$ alors $\forall u \in E$ $f(u) = 0$ donc $u \in \ker f$ et $E = \ker f$

$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f + 0 = \dim E$

c) $\ker f \neq \{0\}$ et $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$ Soit $u_1, \dots, u_p \in \ker f$ base de $\ker f$

$w_1, \dots, w_q \in \operatorname{Im} f$ une base de $\operatorname{Im} f$.

Comme $f_1 : E \to \operatorname{Im} f$ est surjective il y a $u_{p+1}, \dots, u_{p+q} \in E$ tq

pour $1 \leq k \leq q$ $u_{p+k} = w_k$. Alors $u_1, \dots, u_{p+q}$ est une base de E

donc $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = p + q = \dim E$

pv de • $u_1, \dots, u_{p+q}$ libre $\forall (x_1, \dots, x_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tq $\sum_{i=1}^{p+q} x_i \cdot u_i = 0$

on a $0 = f\left(\sum_{i=1}^{p+q} x_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{p+q} x_i \cdot f(u_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot \underset{\substack{\| \\ 0}}{f(u_i)} + \sum_{j=1}^{q} x_{p+j} \cdot f(u_{p+j})$

$= \sum_{j=1}^{q} x_{p+j} \cdot w_j$ donc $(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = 0$ car $1 \leq i \leq k$ $u_i \in \ker f$

Comme $w_1,\dots,w_q \in \mathrm{Im} f$ est libre on a $(x_{p+1},\dots,x_{p+q})=0$: $x_{p+1}=x_{p+2}=\dots=x_{p+q}=0$

donc $0=\sum_{k=1}^{p+q} x_k\cdot u_k = \sum_{k=1}^{p} x_k\cdot u_k$ et, comme $u_1,\dots,u_p\in\ker f$ est libre on a

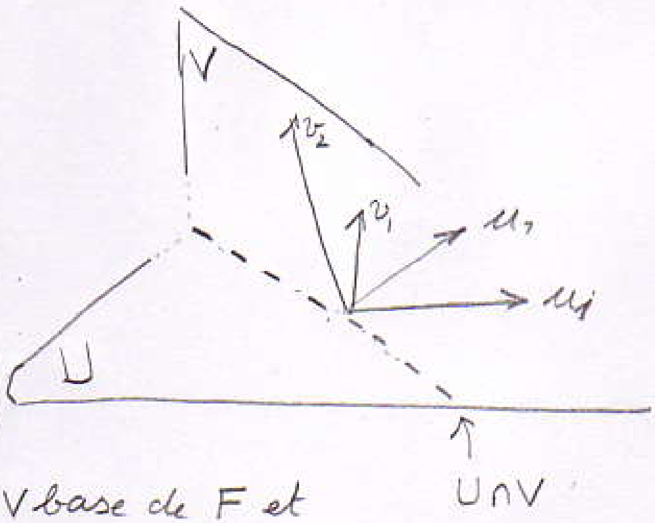
$(x_1,\dots,x_p)=0$: $x_1=\dots=x_p=0$, et $(x_1,\dots,x_{p+q})=0$. □

- $u_1,\dots,u_{p+q}$ engendrent E : $\forall v\in E$, comme $w_1,\dots,w_q$ engendrent $\mathrm{Im} f$, il y a $x_{p+1},\dots,x_{p+q}\in\mathbb{R}$ t.q. $f(v)=\sum_{i=1}^{q} x_{p+i}\cdot w_i$. Alors

$$f\Big(v-\sum_{i=1}^{q} x_{p+i}\cdot u_{p+i}\Big)=f(v)-\sum_{i=1}^{q} x_{p+i}\cdot f(u_{p+i})=f(v)-\sum_{i=1}^{q} x_{p+i}\cdot w_i=0$$

donc $v-\sum_{k=p+1}^{p+q} x_k\cdot u_k\in\ker f$ et, comme $u_1,\dots,u_p$ engendrent $\ker f$,

il y a $x_1,\dots,x_p\in\mathbb{R}$ t.q. $v-\sum_{k=p+1}^{p+q} x_k\cdot u_k=\sum_{k=1}^{p} x_k\cdot u_k$: $v=\sum_{k=1} x_k\cdot u_k$ □



Exemple

Soit $U, V\subset\mathbb{R}^3$ deux plans vectoriels (sous-e.v de dim 2)

$u_1,u_2\in U$ base de U ; $v_1,v_2\in V$ base de F et

$$f:\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \qquad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\cdot u_1+x_2\cdot u_2-y_1\cdot v_1-y_2\cdot v_2$$

alors $\ker f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\ ;\ (x_1\cdot u_1+x_2\cdot u_2-y_1\cdot v_1-y_2\cdot v_2=0)\Leftrightarrow(\underbrace{x_1\cdot u_1+x_2\cdot u_2}_{\in U}=\underbrace{y_1\cdot v_1+y_2\cdot v_2}_{\in V})\}$

isomorphisme $\downarrow$ $\quad\wr$

$U\cap V \qquad x_1\cdot u_1+x_2\cdot u_2=y_1\cdot v_1+y_2\cdot v_2$

donc $\dim\ker f=\dim U\cap V$

$\mathrm{Im} f$ est un sous-e.v. de $\mathbb{R}^3$ contenant $U=f(\mathbb{R}^2\times\{0\})$ et $V=f(\{0\}\times\mathbb{R}^2)$
$[U,V\subset\mathrm{Im} f\subset\mathbb{R}^3]$

Comme $2=\dim U=\dim V\leq\dim\mathrm{Im} f\leq\dim\mathbb{R}^3=3=2+1$

soit $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et $U = \operatorname{Im} f = V = U \cap V$

on a bien $\underset{\dim U\cap V=2}{\underset{\shortparallel}{\dim \ker f}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Im} f}} = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ d'où d

soit $\dim \operatorname{Im} f = 3$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ [f est surjective] et

$$\underset{\dim U\cap V}{\underset{\shortparallel}{\dim \ker f}} + \underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Im} f}} = \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

donc $1 = \dim \ker f = \dim U \cap V$:

L'intersection de deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle.

Vocabulaire

Rappel le rang d'une famille $v_1, \dots, v_n \in E$ de vecteurs d'un e.v. E

est $rg(v_1, \dots, v_n) \overset{def}{=} \dim \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ la dimension du sous-e.v. engendré (par la famille)

def le rang d'une application linéaire $f: E \to F$ est

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im} f \quad \text{la dimension de son image}$$

Remarque Si $E = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est engendré par $v_1, \dots, v_n$ [...

[en particulier si $v_1, \dots, v_n$ est une base de E] alors $\operatorname{Im} E = \operatorname{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_n))$

donc $rg f = rg(f(v_1), \dots, f(v_n)) \leqslant n$ (donc $\underset{\shortparallel}{\dim} E$ si $v_1, \dots, v_n$ base de E)

d'autre part $\operatorname{Im} f \subset F$ donc si F est de dim. finie $rg(f) \leqslant \dim F$

Cor Si E et F sont de dimension finie et $f: E \to F$ est linéaire

$$rg(f) \leqslant \operatorname{Min}(\dim E, \dim F)$$

Conséquences du théorème du rang

Systèmes linéaires

sous-espace des relations linéaires entre $v_1, \dots, v_n$

Rappel $v_1, \dots, v_n \in E$. $Rel(v_1, \dots, v_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k = 0\}$

$g : \mathbb{R}^n \to E, g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$ $\qquad \overset{\shortparallel}{\ker g}$

$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) \qquad \dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g = \dim \mathbb{R}^n$ est donc

Cor 1 $\qquad \dim Rel(v_1, \dots, v_n) + \dim \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) = n$

et $v \in \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ $\left(\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } v = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k\right)$

$\iff \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n, v)$ $\qquad$ le système $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k = v$

$\iff rg(v_1, \dots, v_n) = rg(v_1, \dots, v_n, v)$ $\qquad$ a la solution $(x_1, \dots, x_k)$

Cor 2 Soit E un e.v. de dimension $n > 0$ et $v_1, \dots, v_n \in E$ alors sont équivalents

(1) $v_1, \dots, v_n \in E$ est une famille libre

(2) $v_1, \dots, v_n \in E$ est une famille génératrice

(3) $v_1, \dots, v_n \in E$ est une base de E

pv : par def^n (de base) $(3) \iff ((1) \text{ et } (2))$

Soit $f = g_{\underline{v}} : \mathbb{R}^n \to E \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$ on a par thm du rg

$\dim \ker f + \overset{rg(f)}{\dim \operatorname{Im} f} = \dim \mathbb{R}^n = n$

$(2) \overset{def}{\iff} \operatorname{Im} f = E \underset{\operatorname{Im} f \subset E}{\iff} \dim \operatorname{Im} f = \dim E \underset{\text{hypothèse}}{=} n \iff \dim \ker f = 0 \underset{\text{def}^n \text{ de dim} = 0}{\iff} \ker f = \{0\} \underset{\text{Rappel } \boxed{4}}{\iff} (1)$ $\square$

Cor 3 Soit E et F deux e.v. de dimension finie avec $\dim E = \dim F$
et $f : E \to F$ linéaire alors sont équivalents
(1) f injective, (2) f surjective (3) f isomorphisme

pv $(3) \Leftrightarrow f$ bijective $\overset{def}{\Leftrightarrow} \big((1)$ et $(2)\big)$

thm du rang : $\underbrace{\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f} = \dim E$

$$(1) \underset{\text{thm du §3}}{\Leftrightarrow} \ker f = \{0\} \underset{\text{def de dim}=0}{\Leftrightarrow} \dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim E \underset{\dim E = \dim F}{\Leftrightarrow} \dim \operatorname{Im} f = \dim F \underset{\operatorname{Im} f \subset F}{\Leftrightarrow} \operatorname{Im} f = F \overset{def}{\Leftrightarrow} (2)$$

Rmq l'énoncé de cor 3 est analogue à " Si X et Y sont des ensembles finis avec card X = card Y et $f : X \to Y$ une application alors sont équivalents
(1) f injective (2) f surjective (3) f bijective "