20/11/2006

4 Combinaisons linéaires. Soit E un espace vectoriel, $n \in \{1, 2, \dots\}$ un entier positif $v_1, \dots, v_n \in E$ une famille de n vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ une famille de n réels

La combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$ affectée des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k \in E$, définie par récurrence sur $n \geqslant 1$ $\sum_{k=1}^{1} \lambda_k \cdot v_k = \lambda_1 \cdot v_1$ et, si $n > 1$ $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cdot v_k + \lambda_n \cdot v_n$

Remarques ① Soit $f : E \to F$ linéaire alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(v_k)$

[pour $n = 2$ (et 1) c'est la déf de linéaire, puis récurrence sur $n \geqslant 2$]

② $g : \mathbb{R}^n \to E$, $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k$ est linéaire (application des exemples et de la prop. du §2)

Corollaire $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k \in E \,;\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} = \mathrm{Im}(g)$

est un sous-e.v. de E, le sous-e.v. de E engendré par $v_1, \dots, v_n$

avec (2) de Prop. 2 du §1

pv. directe : a) Si pour $1 \leqslant k \leqslant n$ $\lambda_k = 0$ $\quad 0 = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot v_k \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

b) $\forall v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k$, $v' = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \cdot v_k \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$; $\forall \mu, \mu' \in \mathbb{R}$

$$\mu \cdot v + \mu' \cdot v' = \mu \cdot \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k + \mu' \cdot \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n} \mu \cdot (\lambda_k \cdot v_k) + \sum_{k=1}^{n} \mu' \cdot (\lambda'_k \cdot v_k) = \sum_{k=1}^{n} (\mu \times \lambda_k) \cdot v_k + \sum_{k=1}^{n} (\mu' \times \lambda'_k) \cdot v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\mu \times \lambda_k) \cdot v_k + (\mu' \times \lambda'_k) \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n} (\mu \times \lambda_k + \mu' \times \lambda'_k) \cdot v_k \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n). \; \square$$

Rmq comme $\mu \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \mu' \cdot (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) = (\mu \times \lambda_1, \dots, \mu' \times \lambda'_n) \in \mathbb{R}^n$

le calcul de b) lu dans l'autre sens prouve directement la remarque ②

Lemme 1 Soit $v_1, \dots, v_{n+1} \in E$ $(n > 0)$ alors $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$

avec égalité si et seulement si $v_{n+1} \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

$pr: \subset$ $\forall v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k \in Vect(v_1, \dots, v_n)$ on a (en posant $\lambda_{n+1} = 0$)

$$v = v + 0 \cdot v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k + 0 \cdot v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot v_k \in Vect(v_1, \dots, v_{n+1}). \quad \Delta$$

$= \Rightarrow$ $v_{n+1} \in Vect(v_1, \dots, v_n)$: Si pour $1 \leq k \leq n$, $\lambda_k = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$ $v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot v_k \in Vect(v_1, \dots, v_{n+1}) = Vect(v_1, \dots, v_n)$

$= \Leftarrow$ ______ : on a $v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot v_k \in Vect(v_1, \dots, v_n)$ donc

$$\forall v \in Vect(v_1, \dots, v_{n+1}) \quad v = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k + \lambda_{n+1} \cdot v_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k + \lambda_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot v_k = \dots = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \lambda_{n+1} \times \mu_k) \cdot v_k \in Vect(v_1, \dots, v_n)$$

donc $Vect(v_1, \dots, v_{n+1}) \subset Vect(v_1, \dots, v_n)$ et [puisque $Vect(v_1, \dots, v_n) \subset Vect(v_1, \dots, v_{n+1})$] on a égalité. □

La famille $v_1, \dots, v_n \in E$ est libre si $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = 0 \in E \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \in \mathbb{R}^n \quad (\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et} \dots \text{et } \lambda_n = 0)$$

dans le cas contraire : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = 0$ $\boxed{\text{et}}$ $\underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n}$

($\Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0$ ou ... ou $\lambda_n \neq 0$)

on dit que la famille est liée.

Remarque 3 Soit $f : E \to F$ linéaire et $v_1, \dots, v_n \in E$ liée

($\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = 0$) alors $f(v_1), \dots, f(v_n) \in F$ est liée

[car $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(v_k) \underset{1}{=} f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k) = f(0) = 0$]

3' Si $f(v_1), \dots, f(v_n) \in F$ est libre alors $v_1, \dots, v_n \in E$ est libre

[énoncé contraposé de 3]

4 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = 0 \in E \Leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \ker g \subset \mathbb{R}^n$, où $g : \mathbb{R}^n \to E$, $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k$

donc $v_1, \dots, v_n \in E$ est libre ssi $g : \mathbb{R}^n \to E$, $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k$ est injective

[puisque g linéaire est injective ssi $\ker g = \{0\}$ (thm du §3)]

<u>Corollaire 1</u> Soit $f : E \to F$ linéaire injective et $v_1, \dots, v_n \in E$ alors

$v_1, \dots, v_n \in E$ est libre $\Rightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n) \in F$ est libre

donc (par 3 et 3') $v_1, \dots, v_n \in E$ libre $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n) \in F$ libre
______ liée $\Leftrightarrow$ ______ liée

<u>Lemme 2</u> Soit $v_1, \dots, v_n \in E$ t.q.

$$\{0\} \neq \mathrm{Vect}(v_1) \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}) \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$$

Alors $v_1, \dots, v_n$ est libre.

pv on va montrer $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k \neq 0$

comme $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$ il y a un $1 \leq k \leq n$ t.q. $\lambda_k \neq 0$. Soit m le plus grand de ces k avec $\lambda_k \neq 0$

on a $\lambda_m \neq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq -\lambda_m^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = -\lambda_m^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k =$

cas $m=1$ $= \lambda_1^{-1} \cdot (\lambda_1 \cdot v_1) = (\lambda_1^{-1} \times \lambda_1) \cdot v_1 = v_1 \neq 0$ puisque $\{0\} \neq \mathrm{Vect}(v_1)$

cas $m>1$ $= -\lambda_m^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot v_k + \lambda_m \cdot v_m\right) = \sum_{k=1}^{m-1} -(\lambda_m^{-1} \times \lambda_k) \cdot v_k + \lambda_m^{-1} \times \lambda_m) v_m = \sum_{k=1}^{m-1} (-\lambda_m^{-1} \times \lambda_k) \cdot v_k - v_m$

est $\neq 0$ puisque, comme $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1}) \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ on a $v_m \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1})$ (Lemme 1)

[et $\sum_{k=1}^{m-1} (-\lambda_m^{-1} \times \lambda_k) \cdot v_k \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1})$] □

une famille $v_1, \dots, v_n \in E$ est génératrice si $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$

de Rmq. 1 on déduit

Si $f : E \to F$ est linéaire surjective et $v_1, \dots, v_n \in E$ génératrice alors $f(v_1), \dots, f(v_n)$ est génératrice

5 Bases et dimension. Soit E un espace vectoriel une base de E est une famille $v_1, \ldots, v_n \in E$ qui est libre et génératrice.

Remarque Si $v_1, \ldots, v_n \in E$ est une base de E alors $g : \mathbb{R}^n \to E$ $g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k$ est un isomorphisme [car linéaire bijective (lemme du §2)] et $g^{-1} : E \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme

Théorème Soit $v_1, \ldots, v_n$ et $v'_1, \ldots, v'_{n'}$ deux bases de E alors $n = n'$.

pv: $v'_1, \ldots, v'_{n'}$ génératrice dans E et $g^{-1} : E \to \mathbb{R}^n$ isomorphisme donc $g^{-1}(v'_1), \ldots, g^{-1}(v'_{n'})$ est génératrice dans $\mathbb{R}^n$ et (2) du thm du §3 du chap 3) $n' \geq n$

En échangeant les rôles de $v_1, \ldots, v_n$ et $v'_1, \ldots, v'_{n'}$ on a $n \geq n'$ d'où $n = n'$. ∎

un espace vectoriel E est finiment engendré si il y a $v_1, \ldots, v_n \in E$ tels que $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$

Proposition Un espace vectoriel E finiment engendré et non nul ($E \neq \{0\}$) a une base.

On dit qu'un e. v. finiment engendré est de dimension finie.

Sa dimension est Si $E = \{0\}$ $\dim\{0\} = 0$

Si $E \neq \{0\}$ (et $u_1, \ldots, u_n$ est une base de E) $\dim E = n$

pv: Comme $E \neq \{0\}$ il y a $0 \neq v \in E$ la proposition suit (avec $m = 1$ et $v_1 = v$) du:

Théorème de la base incomplète

Soit E un e.v. engendré par $w_1, \dots, w_n \in E$ $[E = \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n)]$

et $v_1, \dots, v_m \in E$ une famille libre alors soit $v_1, \dots, v_m$ est une base de E

soit il y a $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n$ t.q. $v_1, \dots, v_m, w_{k_1}, \dots, w_{k_q}$ est une base de E.

[on complète la famille libre $v_1, \dots, v_m$ en la base $v_1, \dots, v_m, w_{k_1}, \dots, w_{k_q}$]

pr: on pose $v_0 = 0$ et pour $m+1 \leq k \leq m+n$ $v_k = w_{k-m}$ on considère

(*) $\{0\} = \mathrm{Vect}(v_0) \subset \mathrm{Vect}(v_1) \subset \dots \subset \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m+1}) \subset \dots \subset \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m+n})$

Exercice prouver $\{0\} \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1) \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$

Si $v_1, \dots, v_m$ n'engendre pas E on définit $j_0 = 0$, $j_1 = 1, \dots, j_m = m, j_{m+1}, \dots, j_{m+q}$

les indice où l'inclusion de gauche

$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{j_i - 1}) \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{j_i - 1}, v_{j_i})$ dans (*) est stricte

On a donc $\{0\} \subsetneq \mathrm{Vect}(v_{j_1}) \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_{m+q}})$ [en oubliant les inclusions qui sont des égalités]

donc [d'après le lemme 2 (du §4)] $v_{j_1}, \dots, v_{j_{m+q}} \in E$ est libre

et [d'après le lemme 1 (du §4)] [et des pinaillages de renumérotation et récurrence]

$\mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_{m+q}}) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m+n}) \supset \mathrm{Vect}(v_{m+1}, \dots, v_{m+n}) = \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n) = E$

on a $\mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_{m+q}}) = E$ et $v_{j_1}, \dots, v_{j_{m+q}}$ est aussi génératrice.

d'où le résultat en posant (si $q > 0$), pour $1 \leq i \leq q$, $k_i = j_{m+i}$. $\square$

Exercice Si $v_1, \dots, v_m \in E$ est une famille libre alors pour $i \neq j$ on a $v_i \neq v_j$

Corollaires du théorème de la base incomplète (TBI)

Cor 1 Soit E un e.v. de dimension d et $u_1, \dots, u_k \in E$ alors
(1) si la famille $u_1, \dots, u_k$ est libre on a $k \leqslant d$
(2) si la famille $u_1, \dots, u_k$ est génératrice on a $k \geqslant d$

pv (1) on applique TBI avec $m = k$ $1 \leqslant l \leqslant m$ $v_l = u_l$ et $w_1, \dots, w_n \in E$ famille génératrice
Soit $v_1, \dots, v_m$ $(= u_1, \dots, u_k)$ est une base de E et $d = k$ soit $d = m+q = k+q > k$. □
(2) si $E = \{0\}$ $d = 0 < 1 \leqslant k$. Sinon il y a $1 \leqslant l \leqslant k$ $u_l \neq 0$ on applique TBI avec $m = 1$ $v_1 = u_l$
$n = k$ $1 \leqslant i \leqslant n$ $w_i = u_i$. Soit u_l base de E et $d = 1 \leqslant k$ soit $u_l, u_{j_1}, \dots, u_{j_q}$ base de E
par l'exercice pour $1 \leqslant t \leqslant q$ on a $u_{j_t} \neq u_l$ donc $q \leqslant k-1$ et $d = 1+q \leqslant 1+k-1 = k$. □

Cor 2 Soit E un e.v. de dimension finie et $F \subset E$ un sous-espace de E alors
(1) F est de dimension finie
(2) $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité ssi $F = E$

pv Si $F = \{0\}$ alors $\dim F = 0 \leqslant \dim E$ et $\dim E = 0$ ssi $E = \{0\}$. □
Si $F \neq \{0\}$ il y a $v \in F$ $v \neq 0$ $v_1 = v \in F$ est une famille libre dans F
Si $v_1, \dots, v_m \in F$ est une famille libre alors $v_1, \dots, v_m \in E$ est libre donc
par (1) du cor 1 $m \leqslant d = \dim F$.
Il y a donc une famille libre $v_1, \dots, v_m \in F$ avec m maximum
C'est une base par contraposée de

Affirmation Si $v_1, \dots, v_m \in F$ est libre mais $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m) \subsetneqq F$ ($v_1, \dots, v_m$ n'engendrent pas F)
il y a $v_{m+1} \in F$ t.q. $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ est libre (en particulier m est non maximum)

pv Soit $v_{m+1} \in F$ t.q. $v_{m+1} \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ alors (Lemme 1 du §4)

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m) \subsetneqq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1})$$ donc (Exercice du §5)

$$\{0\} \subsetneqq \mathrm{Vect}(v_1) \subsetneqq \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m) \subsetneqq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1})$$

et (Lemme 2 du §4) $v_1, \dots, v_{m+1}$ est libre. △
- Comme $m \leqslant d = \dim E$ on a $\dim F \leqslant \dim E$. △
- Si $\dim F = \dim E$ $v_1, \dots, v_m$ base de F TBI avec $v_1, \dots, v_m \in E$ et $w_1, \dots, w_n$ engendrent E
on est dans le 1° cas (sinon $\dim E = m + q > m = \dim F$) donc $v_1, \dots, v_m$ base de E et

$$E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m) = F$$ □