13/11/2006

Applications linéaires

but des chap. 5 et 6 ① extraire 8 règles qui ont permis les calculs et raisonnements des chap 3 et 4

② Reprendre et compléter ces raisonnements et calcul dans un cadre général où au lieu de travailler dans $\mathbb{R}^n$ coordonnée par coordonnée on ne suppose seulement que ces huit règles sont satisfaites.

$\boxed{3}$ Dégager la notion d'application linéaire qui permet de transporter raisonnements et calculs d'une situation dans une autre.

1 Espaces vectoriels

un $\left\{\begin{array}{l}\text{espace vectoriel sur } \mathbb{R} \\ \mathbb{R}\text{-espace vectoriel} \\ \text{espace vectoriel réel} \\ \mathbb{R}\text{-e.v}, \text{ e.v.}\end{array}\right\}$ est $(E, +, \cdot)$

un ensemble E muni de

deux applications $+ : E\times E \to E, (x,y) \mapsto x+y$ son addition

$\cdot : \mathbb{R}\times E \to E, (\lambda, x) \mapsto \lambda\cdot x$ sa multiplication externe.

p^tés de + 1) $\forall x,y,z \in E \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité de +)

2) $\forall x,y \in E \quad y+x = x+y$ (commutativité de +)

3) $\exists e \in E$ t.q. $\forall x \in E \quad x = x+e \ (= e+x)$ (existence d'un élément neutre)

4) $\forall x \in E \quad \exists x' \in E$ t.q. $e = x+x' \ (= x'+x)$ (existence d'opposés pour +)

p^tés de · 5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E \quad \lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda \overset{\text{multiplication de } \mathbb{R}}{\times} \mu)\cdot x$

6) $\forall x \in E \quad 1\cdot x = x$

p^tés des deux 7) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E \quad (\lambda \overset{\text{addition de } \mathbb{R}}{+} \mu)\cdot x = \lambda\cdot x \overset{\text{addition de } E}{+} \mu\cdot y$ (distributivité à gauche de · sur +)

8) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,y \in E \quad \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\mu\cdot y$ (——— droite ———)

2 · est une opération $\boxed{\text{externe}}$: les lettres à gauche et à droite du symbole ·

représentent des objets de nature ≠ $\left\{\begin{array}{l}\text{à gauche un nombre réel (élément de } \mathbb{R}\text{), dit scalaire} \\ \text{à droite un élément de l'espace E, dit vecteur}\end{array}\right.$

<u>Exemples</u> 1) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ où $+$ et $\cdot$ sont les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$

2) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ où $+$ est l'addition de $\mathbb{C}$ et $\cdot$ la restriction à $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\subset\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ de $\times$ de $\mathbb{C}$.

Ce sont les seuls cas (que nous rencontrerons) où un élément puisse être considéré à la fois comme vecteur et scalaire

<u>Proposition 1</u> i) L'élément neutre de $+$ est unique (si $\forall x\in E$ $x+e' = x$ alors $e' = e$)

ii) $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ on a $\lambda\cdot e = e$ iii) $\forall y\in E$ on a $0\cdot y = e$

iv) $\forall y\in E$ l'opposé de y est unique : si $y+y'' = e$ alors $y'' = (-1)\cdot y$

pr i) e' élt neutre donc (prendre $x=e$ dans 3)) $e = e+e'$

e ———————— $x = e'$ ———— $e' = e'+e$ $\square$

ii) $\underbrace{e = \lambda\cdot e+(\lambda\cdot e)'}_{4)\text{ avec } x=\lambda\cdot e} \underbrace{=\lambda\cdot(e+e)}_{(3)\text{ avec } x=e}+(\lambda\cdot e)' \underbrace{= (\lambda\cdot e+\lambda\cdot e)+(\lambda\cdot e)'}_{(8)\text{ avec } x=y=e} \underset{1)}{=} \lambda\cdot e+\underbrace{(\lambda\cdot e+(\lambda\cdot e)') = \lambda\cdot e}_{4)\text{ avec } x=\lambda\cdot e}\underbrace{+e = \lambda\cdot e}_{3)\text{ avec } x=\lambda\cdot e}$ $\square$

iii) $0\cdot y = 0\cdot y+e = 0\cdot y+(0\cdot y+(0\cdot y)') = (0\cdot y+0\cdot y)+(0\cdot y)' = (0+0)\cdot y+(0\cdot y)' = 0\cdot y+(0\cdot y)' = e$ $\square$

iv) $(-1)\cdot y = (-1)\cdot y+e = (-1)\cdot y+(y+y'') = ((-1)\cdot y+y)+y'' = ((-1)\cdot y+1\cdot y)+y'' = (-1+1)\cdot y+y'' = 0\cdot y+y'' \underset{iii)}{=} e+y'' = y''$ $\square$

⚠ <u>Notations usuelles</u> on note $e=0$ le <u>zéro</u> de E $x' = -x$ l'<u>opposé</u> de x

iii) se ré-écrit $0\cdot y = 0$ iv) $(-1)\cdot y = -y$

($\mathbb{R}\ni$) zéro scalaire $\neq$ zéro vecteur ($\in E$)

<u>Corollaire</u> $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $\forall x,y\in E$ on a

i) $\lambda\cdot x = 0$ ssi ($\lambda = 0$ ou $x = 0$) i') $\lambda\cdot x\neq 0$ ssi ($\lambda\neq 0$ et $x\neq 0$)

ii) $\lambda x = \mu y$ ssi $\mu = 0$ et ($\lambda = 0$ ou $x = 0$) ou $\mu\neq 0$ et $y = (\mu^{-1}\lambda)\cdot x$

pr : i') est contraposé de i) i) $\Rightarrow$: si $\lambda\cdot x = 0$ et $\lambda\neq 0$ $0 = \lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot x) = (\lambda^{-1}\lambda)\cdot x = 1\cdot x = x$ $\square$

$\Leftarrow$ c'est ii) et iii) de la prop.

Exercice pr de ii)

Remarque Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E \neq \emptyset$ (puisque $0 \in E$)

Suite des Exemples 3) $E = \{0\}$ $+ : \{0\} \times \{0\} \to \{0\}$ $(0,0) \mapsto 0$, $\cdot\ \mathbb{R} \times \{0\} \to \{0\}$ $(\lambda, 0) \mapsto 0$
l'espace nul (ou trivial)

4) Si $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ sont deux e.v. alors $(E\times F, +, \cdot)$ où

les opérations se font composante par composante :

si $(x,u), (y,v) \in E\times F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(x,u)+(y,v) = (x+y, u+v)$
$\lambda\cdot(x,u) = (\lambda\cdot x, \lambda\cdot y)$

est un e.v. : l'espace vectoriel produit de E par F.

4') pour $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^n$ est définit par récurrence
$\mathbb{R}^0 = \{0\}$ (Ex 3)) ; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (Ex 1); $n \geq 1$ $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

Ce sont les espaces $\mathbb{R}^n$ du chapitre 3.

Soit E un e.v. un sous-espace vectoriel de E est une partie $F \subset E$ t.q.
(sous e.v.)

0) $0 \in F$

i) $\forall x, y \in F$ $x + y \in F$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall x \in E$ $\lambda . x \in F$

Remarque Si F est un sous e.v. de E alors $+$ et $\cdot$ induisent
$+_1 : F\times F \to F$ et $\cdot_1 : \mathbb{R}\times F \to F$ t.q. $(F, +_1, \cdot_1)$ est un e.v.

pv 1) 2) 5) 6) 7) et 8) pour F sont des cas particuliers de 1) ... 8) pour E
3) est la cond^{n} 0 et 4) est le iv) de la Prop 1 □

Proposition 2 Soit E un e.v. et $F \subset E$ alors sont équivalents

(1) F est un sous e.v. de E
(2) $0 \in F$ et iii) $\forall x, y \in F$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda . x + \mu . y \in F$
(3) $F \neq \emptyset$ et iii) ___

pv $(1)\Rightarrow(2)$ par ii) $\lambda.x \in F$ et $\mu.y \in F$ par i) $\lambda.x+\mu.y \in F$

$(2)\Rightarrow(3)$ $0 \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$

$(3)\Rightarrow(1)$ $F\neq\emptyset$ $\exists x \in F$ donc (iii) avec $\lambda=\mu=0$ et $y=x$) $0=0.x+0.x \in F$

• si $x,y \in F$ (iii) avec $\lambda=\mu=1$) $x+y = 1.x+1.y \in F$

• si $\lambda \in \mathbb{R}$ $x\in F$ (iii) avec $\mu=0$, $y=x$ $\lambda.x = \lambda.x+0.x \in F$ □

<u>Exemple</u> 1) $\mathbb{R}i = \{bi \in \mathbb{C} ; b \in \mathbb{R}\}$ l'ens. des imaginaires purs est un ss.ev de $\mathbb{C}$

$\mathbb{R} = \{a \in \mathbb{C} ; a \in \mathbb{R}\}$ —— réels ——

2) Si $p,q \in \mathbb{N}$ $n=p+q$ $\mathbb{R}^p \times \{0\} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n ; p<k\leq n \; x_k=0\}$ sont des sous-e.v. de $\mathbb{R}^n$

$\{0\}\times\mathbb{R}^q = \{$ —— $; 1\leq k \leq p \; x_k=0\}$

<u>Corollaire</u> Soit F_1 et F_2 deux sous-e.v. d'un e.v. E

alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-e.v. de E

pv caractérisation (2) $0 \in F_1$ et $0\in F_2 \Rightarrow 0 \in F_1\cap F_2$

$x,y \in F_1\cap F_2$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R} \Rightarrow$ $x,y\in F_1$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; $x,y \in F_2$, $\lambda,\mu \in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda.x+\mu.y\in F_1$; $\lambda.x+\mu.y \in F_2$ $\Rightarrow \lambda.x+\mu.y \in F_1\cap F_2$ □

<u>Remarques</u> 1) la preuve n'aurait pas été si simple avec la caractérisation (3)

car en général si $A,B\subset X$ $A\neq\emptyset$ $B\neq\emptyset \not\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$

$A=\{1\}\neq\emptyset$, $B=\{0\}\neq\emptyset \subset \{0,1\}$ mais $A\cap B=\emptyset$

2) $F_1\cup F_2$ n'est un sous e.v. de E que si $F_1\subset F_2$ ou $F_2\subset F_1$

pv $\Rightarrow$ $F_1\cup F_2$ sous-ev de E et $F_1 \not\subset F_2$ ($\exists x \in F_1$ $x\notin F_2$)

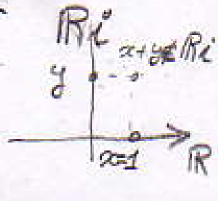
$\forall y \in F_2$ $x+y \notin F_2$ (sinon $x = 1.(x+y)+(-1).y \in F_2$)

comme $F_1\cup F_2$ est un sous-ev $x+y\in F_1\cup F_2$ donc $x+y \in F_1$

et $y = (-1).x + x+y \in F_1$ c.a.d. $F_2 \subset F_1$

$\Leftarrow$ Si $F_1\subset F_2$ $F_1\cup F_2 = F_2$ si $F_2 \subset F_1$ $F_1\cup F_2=F_1$ □

<u>Ex</u> $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}i$ sont des ss.ev de $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}\cap\mathbb{R}i=\{0\}$ mais $\mathbb{R}\cup\mathbb{R}i$ n'est pas un sous-ev



2. Applications linéaires. Soit E, F deux e.v.

$\left\{\begin{array}{l}\text{une application linéaire}\\ \text{un morphisme}\end{array}\right\}$ de E vers F est une application $f : E \to F$ t.q.

$\forall x, y \in E ; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$

Exemples 1] $f = 0 : E \to F$, $0(x) = 0$ l'application nulle (ou triviale)

2] $Id_E : E \to E$, $Id_E(x) = x$ l'application identité

3] "Jeux avec les coordonnées" dans les e.v. produit (cf. calculs de $\mathbb{R}^n$)

3.1] $pr_1 : E \times F \to E$, $pr_1(x, y) = x$; $pr_2 : E \times F \to F$, $pr_2(x, y) = y$ sont linéaires

3.2] Si $f_1 : E \to F_1$, $f_2 : E \to F_2$ sont deux morphismes alors

$(f_1, f_2) : E \to F_1 \times F_2$, $(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$ est un morphisme

3.3] Si $f : E \to F$, $g : G \to H$ sont deux morphismes alors

$f \times g : E \times G \to F \times H$, $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ est un morphisme

4] Si F est un e.v., $v \in F$ et $f : E \to \mathbb{R}$ est linéaire alors

$$f \cdot v : E \to F, \quad f \cdot v(\underset{\in E}{x}) = \underset{\in \mathbb{R}}{f(x)} \cdot \underset{\in F}{v} \quad \text{est linéaire}$$

pv c'est la distributivité à gauche 7) : $f \cdot v(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) \overset{def}{=} f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) \cdot v$

$= (\lambda \times f(x) + \mu \times f(y)) \cdot v = \lambda \times f(x) \cdot v + \mu \times f(y) \cdot v = \lambda \cdot (f(x) \cdot v) + \mu \cdot (f(y) \cdot v) = \lambda \cdot (f \cdot v)(x) + \mu \cdot (f \cdot v)(y)$ $\square$

5] $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ sont

linéaires donc [3.2] $f = (Re, Im) : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, ($f$ est linéaire)

$z \mapsto (Re(z), Im(z))$

Opérations de lignes de la méthode de Gauss

6] $a \in \mathbb{R}$ $1 \leq i, j \leq m$ $E_{ij}(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto E_{ij}(a)(x) = y = (y_1, \ldots, y_m)$

où si $k \neq i$ $y_k = x_k$ et $y_i = x_i + x_j \times a$ est linéaire.

pv $E_{ij}(a)(\lambda \cdot x + \lambda' \cdot x') = E_{ij}(a)(\lambda x_1 + \lambda' x'_1, \ldots, \lambda x_m + \lambda' x'_m) = (y_1, \ldots, y_m)$

kième projection
coordonnée

où si $k \neq i$ $y_k = \lambda \times x_k + \lambda' \times x'_k = Pr_k(\lambda \cdot E_{ij}(a)(x) + \lambda' \cdot E_{ij}(a)(x'))$

$y_i = \lambda \times x_i + \lambda' \times x'_i + (\lambda \times x_j + \lambda' \times x'_j) \times a = \cdots = \lambda \times (x_i + x_j \times a) + \lambda' \times (x'_i + x'_j \times a) = Pr_i(\quad)$

donc $E_{ij}(a)(\lambda \cdot x + \lambda' \cdot x') = \lambda \cdot E_{ij}(a)(x) + \lambda' \cdot E_{ij}(a)(x')$ $\square$

<u>Exercice</u> écrire les pv pour (certains de) 1], 2], 3], 5] et

7] si $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ est bijective alors $f_\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est bijective
(une permutation de 1 à m) $\quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$

8] Si E est un e.v. et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $c_{\lambda,\mu} : E \times E \to E$ est linéaire
$(x,y) \mapsto \lambda \cdot x + \mu \cdot y$

pv : $\forall (x,y), (x',y') \in E \times E ; \nu, \nu' \in \mathbb{R}$

$c_{\lambda\mu}(\nu \cdot (x,y) + \nu' \cdot (x',y')) = c_{\lambda\mu}(\nu \cdot x + \nu' \cdot x', \nu \cdot y + \nu' \cdot y')$

$= \lambda \cdot (\nu \cdot x + \nu' \cdot x') + \mu \cdot (\nu \cdot y + \nu' \cdot y') = \cdots = (\lambda \times \nu) \cdot x + (\mu \times \nu) \cdot y + (\lambda \times \nu') \cdot x' + (\mu \times \nu') \cdot y'$

$= (\nu \times \lambda) \cdot x + (\nu \times \mu) y + (\nu' \times \lambda) \cdot x' + (\nu' \times \mu) \times y' = \cdots = \nu \cdot (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) + \nu' \cdot (\lambda \cdot x' + \mu \cdot y')$

commutativité de $\times$ ds $\mathbb{R}$

$= \nu \cdot c_{\lambda,\mu}(x,y) + \nu' \cdot c_{\lambda,\mu}(x',y')$. $\square$

Proposition Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux morphismes (applications linéaires) composables $[E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G]$
Alors l'application composée $g \circ f : E \to G$ est un morphisme
$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$

pv : $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$g \circ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = g(f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y)) = g(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)) = \lambda \cdot g(f(x)) + \mu \cdot g(f(y)) = \lambda \cdot g \circ f(x) + \mu \cdot g \circ f(y)$ $\square$

défn de $g \circ f$ $\quad$ car f linéaire $\quad$ car g linéaire

fin du 13/11/2006

Application Soit $f, g : E \to F$ linéaires et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$\lambda \cdot f + \mu \cdot g : E \to F$, $x \mapsto \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)$ est linéaire

pv $E \xrightarrow{(f,g)} F \times F \xrightarrow{\varsigma_{\lambda\mu}} F$ sont linéaires par ex 3 et 8 et

ont pour composée $\varsigma_{\lambda\mu} \circ (f,g) : E \to F, x \mapsto \varsigma_{\lambda\mu}(f(x), g(x)) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x)$ $\square$

Exercice montrer directement (avec toutes les étapes [sans $= \cdots =$] que

$\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est linéaire et comparez les deux preuves.

un isomorphisme d'un e.v. E sur un e.v. F est un morphisme

$f : E \to F$ t.q. il y a un morphisme $g : F \to E$ avec $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$

g est dit isomorphisme réciproque de f et noté $g = f^{-1}$

Exemples 1) Id_E est un isomorphisme.

2) $(Re, Im) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme d'isomorphisme réciproque

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(x,y) = x + yi$

3) Si $i \neq j$ et $a \in \mathbb{R}$ $E_{ij}(a)$, $f_\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sont des isomorphismes

et $E_{ij}(a)^{-1} = E_{ij}(-a)$; $f_\sigma^{-1} = f_{\sigma^{-1}}$

pv $\forall b \in \mathbb{R}$, $E_{ij}(-b) \circ E_{ij}(b)(x_1, \dots, x_m) = E_{ij}(-b)(E_{ij}(b)(x_1, \dots, x_m)) = E_{ij}(-b)(y_1, \dots, y_m)$

où si $k \neq i$ $y_k = x_k$ et $y_i = x_i + x_j \times b$

$= (z_1, \dots, z_m)$ où si $k \neq i$ $z_k = y_k = x_k$ et

$z_i = y_i + y_j \times (-b) = x_i + x_j b + x_j \times -b = x_i$.

d'où le résultat en prenant $b = a$ et $b = -a$ $\square$

car $j \neq i$

4) Soit $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijective alors $f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un morphisme
(permutation de 1 à n) $\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$

pv: Si $\tau : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijective $f_{\tau^{-1}} \circ f_\tau (x_1, \dots, x_n) = f_{\tau^{-1}}(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = (x_{\tau^{-1}(\tau(1))}, \dots, x_{\tau^{-1}(\tau(n))}) = (x_1, \dots, x_n) = Id_E(x)$

d'où, en prenant $\tau = \sigma$ puis $\tau = \sigma^{-1}$ $\quad f_{\sigma^{-1}} \circ f_\sigma = Id_E = f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}}$ □

<u>Remarque</u> un isomorphisme est une application bijective

[Rappel $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

$f : E \to F$ bijective $\Leftrightarrow \exists g : F \to E$ tq $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$]

<u>Lemme</u> L'application réciproque d'un morphisme bijectif est un morphisme.

donc un morphisme est un isomorphisme ssi il est bijectif

pv: $f : E \to F$ morphisme bijectif d'application réciproque f^{-1} et $u, v \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda . f^{-1}(u) + \mu . f^{-1}(v)) = \lambda . f(f^{-1}(u)) + \mu . f(f^{-1}(v)) = \lambda . u + \mu . v$$

donc $\lambda . f^{-1}(u) + \mu . f^{-1}(v)$ est un antécédent de $\lambda . u + \mu . v$.

Comme f est bijective il y en a un seul $f^{-1}(\lambda . u + \mu . v) = \lambda . f^{-1}(u) + \mu . f^{-1}(v)$. □

$\boxed{\text{Remarque}}$ il faut voir un isomorphisme $f : E \to F$

comme un moyen de « traduire » dans F des énoncés

dans E ne faisant intervenir que les propriétés d'espace vectoriel

[la traduction dans l'autre sens est assurée par f^{-1}]

<u>Exemple</u> dans la première étape de la méthode de Gauss on

construit un isomorphisme $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ composé de $E_{ij}(a)$ et f_σ

de sorte qu'il devienne « évident » de répondre à la question

$rg(f(v_1), \dots, f(v_n), f(v)) \overset{?}{=} rg(f(v_1), \dots, f(v_n))$ et donc $rg(v_1, \dots, v_n) = rg(v_1, \dots, v_n, v)$

(puisque f isomorphisme)

3 Espaces vectoriels image, image réciproque et noyau

Soit $f : E \to F$ un morphisme d'un e.v. E vers un e.v. F

et $X \subset E$, $Y \subset F$ des sous-ev. de E et F

Rappel $f(X) = \{f(x) \in F ; x \in X\} \subset F$; $\overset{-1}{f}(Y) = \{x \in E ; f(x) \in Y\} \subset E$

Proposition $f(X)$ et $\overset{-1}{f}(Y)$ sont des sous-e.v. de F et E respectivement

pv: • $f(0_E) = f(0.0_E) = 0.f(0_E) = 0_F$ donc comme $0_E \in X$ et $0_F \in Y$ on a $0_F \in f(X)$ et $0_E \in \overset{-1}{f}(Y)$

•• $y = f(x)$, $y' = f(x') \in f(X)$ [où $x, x' \in X$] ; $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$\lambda . y + \lambda' . y' = \lambda . f(x) + \lambda' . f(x') \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ linéaire}}}{=} f(\lambda . x + \lambda' x') \in f(X)$ puisque $\lambda . x + \lambda' . x' \in X$ ss-ev.

••• $x, x' \in \overset{-1}{f}(Y)$; $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ c.a.d $f(x), f(x') \in Y$ $f(\lambda . x + \lambda . x') = \lambda . \underbrace{f(x)}_{\in Y} + \lambda' . \underbrace{f(x')}_{\in Y} \in Y$ donc $\lambda . x + \lambda' x' \in \overset{-1}{f}(Y)$ □

L'image du morphisme $f : E \to F$ est $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ (un sous-ev de F)

son noyau est $\ker f = \overset{-1}{f}(\{0\})$ (un sous-e.v. de E)

Remarque $f : E \to F$ surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$

[C'est la def^n de surjective et est vrai en général pour toute application (entre ensembles)]

Théorème un morphisme $f : E \to F$ est injectif ssi $\ker(f) = \{0\}$

pv $\Rightarrow$ f injectif $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in E$ $(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$

en appliquant à $x \in \ker f$ et $y = 0.x = 0$ $f(x) = 0 = 0.f(x) = f(0.x)$ donc $x = 0.x = 0$ □

$\Leftarrow$ $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x + (-1).y) = f(x) - f(y) = 0$

donc $x - y = x + (-1).y \in \ker f = \{0\}$ c.a.d. $x - y = 0$ donc $x = y$

Rmqs ① on a montré l'**Affirmation** : Si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0)=0$ et $f(x-y)=f(x)-f(y)$

② Le point important du thm est que linéaire permet pour montrer (plus tard) $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ de ne traiter que le cas où $y=0$ et on aura des critères pour vérifier qu'un espace est $\{0\}$ sans considérer ses éléments.

Exercice Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un morphisme alors soit $\operatorname{Im} f = \{0\}$, $\ker f = E$ (donc $f=0$)

soit $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ et si $v \in E$ tq $f(v)=1$ $\forall x \in E$ $x - f(x).v \in \ker f$ et

$h = (Id_E - f.v, f) : E \to \ker f \times \mathbb{R}$ $h(x) = (x - f(x).v, f(x))$

est un isomorphisme.

pv si $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$ il y a $u \in E$ tq $f(u) \neq 0$ soit $v = \frac{1}{f(u)}.u$

on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda.v) = f(\lambda \times \frac{1}{f(u)}.f(u)) = \lambda \times \frac{1}{f(u)}.f(u) = \lambda$

donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ et $f(v) = 1$ (cas $\lambda = 1$)

2) $f(\underset{E}{x} - \underset{\mathbb{R}}{f(x)}.\underset{E}{v}) = f(x) - f(x).f(v) = f(x) - f(x) \times 1 = 0$ et $x - f(x).v \in \ker f$

3) première preuve
h injective $x \in \ker h$ $(x - f(x).v, f(x)) = 0$ donc $f(x) = 0$ et $x = x - f(x).f(x) = 0$

h surjective $\forall (y,t) \in \ker f \times \mathbb{R}$ $f(y + t.v) = f(y) + t.f(v) = 0 + t = t$

donc $h(y+t.v) = (y + t.v - f(y+t.v).v, f(y+t.v)) = (y + t.v - t.v, t) = (y,t)$

seconde preuve $k : \ker f \times \mathbb{R} \to E$ $k(y,t) = y + t.v$

est un morphisme ($k = ind_{\ker f}^{E} \circ Pr_1 + Pr_2 . v$) et calc.

$k \circ h = Id_E$: $k \circ h(x) = k(x - f(x).v, f(x)) = x - f(x).v + f(x).v = x$
et $h \circ k = Id_{\ker f \times \mathbb{R}}$ [calcul dans h surjectif de la 1° preuve]