06/11/2006

7 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^m$ et systèmes linéaires.

Soit m, n des entiers positifs et $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^m$

c.a.d. $\{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}^m$, $j \mapsto v_j$ $\quad (\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^m)^n)$

$$V = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \overset{def}{=} \left\{ v = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j \in \mathbb{R}^m ; (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

l'ensemble des combinaisons linéaire de la famille $v_1, \dots, v_n$

$$\mathcal{R} = \mathrm{Rel}(v_1, \dots, v_n) \overset{def}{=} \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j = 0 \ (\in \mathbb{R}^m) \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

l'ensemble des relations linéaires de la famille $v_1, \dots, v_n$

Remarques et définition (1) $0 \in V$ et $0 \in \mathcal{R}$

(2) $\forall v = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j$, $v' = \sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot v_j \in V$; $x = (x_1, \dots, x_n)$; $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathcal{R}$; $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda \cdot v + \lambda' \cdot v' \in V \quad \text{et} \quad \lambda \cdot x + \lambda' \cdot x' \in \mathcal{R}$$

on dit que V est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par $v_1, \dots, v_n$

$\mathcal{R}$ — un ——————————————— $\mathbb{R}^n$

pr: (1) $0 = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot v_j \in \mathbb{R}^m$ donc $0 \in V$ et $0 \in \mathcal{R}$

(2) $\lambda \cdot v + \lambda' \cdot v' = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j + \lambda' \sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda (x_j \cdot v_j) + \sum_{j=1}^{n} \lambda' (x'_j \cdot v_j) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\lambda x_j) \cdot v_j + (\lambda' x'_j) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda x_j + \lambda' x'_j) \cdot v_j \in V \quad \square$$

Exercice pr de la 2° partie de 2 $x, x' \in \mathcal{R} \Rightarrow \lambda \cdot x + \lambda' \cdot x' \in \mathcal{R}$.

une renumérotation de $v_1, \dots, v_n$ est $v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}$ où σ est une permutation de 1 à n $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijective

<u>Lemme 1</u> $v_1,\dots,v_n$ est lié ssi soit $n=1$ et $0 = v_n$ $(= v_1)$

soit il y a une renumérotation $v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}$ t.q.

$$v_{\sigma(n)} \in Vect(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n-1)}) \quad \left(\Leftrightarrow Vect(v_1,\dots,v_n) = Vect(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n-1)})\right)$$

De plus si $v_1,\dots,v_{n-1}$ libre on peut prendre $\sigma = Id$ i.e. $v_n \in Vect(v_1,\dots,v_{n-1})$

pv $v_1,\dots,v_n$ liée $\overset{(def)}{\Leftrightarrow} \exists (x_1,\dots,x_n)\neq 0 \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j \neq 0$

Si $n=1$ $\quad x_n\neq 0$ et $x_n\cdot v_n = 0 \Rightarrow v_n = (x_n^{-1}x_n)\cdot v_n = x_n^{-1}(x_n\cdot v_n)=0$

si $n>1$ $\exists k\in\{1,\dots,n\}$ $x_k\neq 0$ $\quad \sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ $1\le j\le n-k$ $\sigma(j)=j+k$

est une permutation avec $\sigma(n)=k$ donc $x_{\sigma(n)}\neq 0$ $\quad n-k<j\le n$ $\sigma(j)=k-n+j$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\cdot v_j = 0 \Leftrightarrow 0 = x_{\sigma(n)}^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}\cdot v_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{n} \left(x_{\sigma(n)}^{-1}\cdot(x_{\sigma(j)}\cdot v_j)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{\left(x_{\sigma(n)}^{-1}x_{\sigma(j)}\right)}_{\overset{def}{=} -\lambda_j}\cdot v_{\sigma(j)} + \underbrace{\left(x_{\sigma(n)}^{-1}x_{\sigma(n)}\right)}_{=1}\cdot v_{\sigma(n)} = -\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j x_{\sigma(j)}\cdot v_j + v_n$$

$$\Leftrightarrow x_{\sigma(n)} = \sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\cdot v_{\sigma(j)} \in Vect(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$$

Si $v_1,\dots,v_{n-1}$ libre alors $x_n\neq 0$ donc on peut prendre $k=n$ et $\sigma=Id$. □

<u>Corollaire</u> Soit $v_1=\dots=v_n=0$ soit il y a une renumérotation $v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(n)}$ et $1\le r\le n$ tq (1) $Vect(v_1,\dots,v_n)=Vect(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(r)})$

(2) $v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(r)}$ libre

pv récurrence sur n $\quad n=1$ c'est $n=1$ dans le lemme

$n>1$ soit $v_1,\dots,v_n$ libre $r=n$ $\sigma=Id$

soit (Lemme 1) il y a une renumérotation σ tq $Vect(v_1,\dots,v_n)=Vect(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n-1)})$

Récurrence soit $v_{\sigma(1)}=\dots=v_{\sigma(n-1)}=0$ donc $v_{\sigma(n)}=0$

soit il y a $1\le r\le n-1$ renumérotation $v_{\tau(1)}=v_{\sigma(\tau'(1))},\dots,v_{\tau(n-1)}=v_{\sigma(\tau'(n-1))}, v_{\tau(n)}=v_{\sigma(n)}$

tq $Vect(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(r)})=Vect(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n-1)})=Vect(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})$ □

Remarque et définition Les deux cas sont disjoints.

Si τ_1, r_1 et τ_2, r_2 sont deux choix dans le second cas pour $i=1,2$

$$f_i : \mathbb{R}^{r_i} \to Vect(v_1,\dots,v_n) \quad f_i(t_1,\dots,t_{r_i}) = \sum_{k=1}^{r_i} t_k \cdot v_{\tau_i(k)}$$

est bijective et preserve la propriete d'être libre ou lié

donc $f_1^{-1}(v_{\tau_2(1)}),\dots,f_1^{-1}(v_{\tau_2(r_2)})$ est libre dans $\mathbb{R}^{r_1}$ donc $r_2 \le r_1$

et (en échangeant le rôle de 1 et 2) $r_1 \le r_2$ d'où $r_1 = r_2 = r$ est le rang de la famille $v_1,\dots,v_n$. On note en ce cas

$$r = rg(v_1,\dots,v_n) \quad \text{et} \quad 0 = rg(0,\dots,0)$$

Corollaire 1 Soit $v \in \mathbb{R}^m$ alors $v \in Vect(v_1,\dots,v_n)$ ssi

$$rg(v_1,\dots,v_n,v) = rg(v_1,\dots,v_n)$$

Corollaire 2 Si $rg(v_1,\dots,v_n) = r$ et $Vect(v_1,\dots,v_n) = Vect(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(r)})$

alors si $r = n$ $R(v_1,\dots,v_n) = \{0\}$

si $r > n$ $1 \le l \le n-r$ $v_{\tau(r+l)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{li} \cdot v_{\tau(i)}$

$$z_l = (x_{l1},\dots,x_{l,n}) \begin{cases} 1 \le i \le r & x_{l\tau(i)} = \lambda_{li} \\ & x_{l\tau(r+l)} = -1 \\ r < i \le n, i \ne l & x_{l,\tau(r+i)} = 0 \end{cases}$$

alors $R(v_1,\dots,v_n) = Vect(z_1,\dots,z_{n-r})$

et $rg(z_1,\dots,z_{n-r}) = n-r$

pr cor1 $v \in Vect(v_1,\dots,v_n,v) \Leftrightarrow Vect(v_1,\dots,v_n,v) = Vect(v_1,\dots,v_n) = Vect(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(r)})$

avec $v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(r)}$ libre $\Updownarrow$ $= rang(v_1,\dots,v_n,v) = r = rg(v_1,\dots,v_m)$ $\square$

pv car 2 $\bullet$ $\mathfrak{z}_\ell \in R$ $\sum_{k=1}^{n} x_{\ell k} \cdot v_k = \sum_{i=1}^{n} x_{\ell\,\sigma(i)} \cdot v_{\sigma(i)} = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{i\ell} \cdot v_{\sigma(i)} - v_{\sigma(r+\ell)} = 0$ Δ ④

$\bullet\bullet$ si $\sum_{\ell=1}^{n-r} \mu_\ell \cdot \mathfrak{z}_\ell = (x_1, \dots, x_n)$ alors pour $1 \leq \ell \leq n-r$ $x_{\sigma(r+\ell)} = -\mu_\ell$

donc $\sum_{\ell=1}^{n-r} \mu_\ell \cdot \mathfrak{z}_\ell = 0 \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{n-r} = 0$

c.a.d $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_{n-r}$ libre et $rg(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_{n-r}) = n-r$ Δ

$\bullet\bullet\bullet$ Si $\mathfrak{z} = (t_1, \dots, t_n) \in R$ $y = (x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{z} + \sum_{\ell=1}^{n-r} t_{\sigma(r+\ell)} \cdot \mathfrak{z}_\ell \in R$

et pour $1 \leq \ell \leq n-r$ $x_{\sigma(r+\ell)} = t_{\sigma(r+\ell)} + t_{\sigma(r+\ell)} \times (-1) = 0$

donc $0 \overset{\text{car } y \in R}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k = \sum_{i=1}^{r} x_{\sigma(i)} \cdot v_{\sigma(i)} \Longrightarrow x_{\sigma(1)} = \dots = x_{\sigma(r)} = 0$ $\Rightarrow y = 0$

car $1 \leq \ell \leq n-r$ $x_{\sigma(r+\ell)} = 0$ car $v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}$ libre

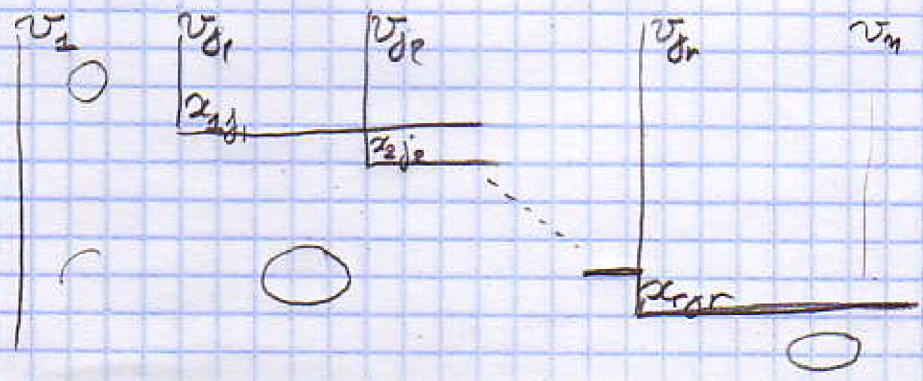
et $\mathfrak{z} = -\sum_{\ell=1}^{n-r} t_{\sigma(r+\ell)} \cdot \mathfrak{z}_\ell \in Vect(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_{n-r})$. $\square$

Soit $0 \leq r \leq n$ et $0 = j_0 < 1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_r \leq n$

une famille $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ est $j_0, \dots, j_r$ échelonnée si,
en notant $1 \leq j \leq n$ $v_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ on a

(1) $1 \leq k \leq r$ $x_{k j_k} \neq 0$

(2) $x_{ij} \neq 0 \Rightarrow \exists\, 1 \leq k \leq r$ $i \leq k$ $j_k \leq j$



<u>Lemme 2</u> Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ est $j_0, j_1, \dots, j_r$ échelonnée alors
$rg(v_1, \dots, v_n) = r$

Plus précisément, en posant $j_{r+1} = n+1$,

pour $0 \leq k \leq r+1$ et $1, j_k \leq j < j_{k+1}$ on a

Si $k=0$ $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_j) = \{\vec{0}\}$

si $k \geq 1$ $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_j) = \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m ; k < i \leq m, x_i = 0\}$

par récurrence sur n $n=1$ soit $v_1 = 0$ v_1 est 0 échelonné et $r=0$
soit $v_1 = x_{11} \neq 0$ v_1 est 1 échelonné et $r=1$

$n > 1$ soit $v_1 = \quad = v_n = 0$ alors $v_1, \dots, v_n$ est 0 échelonné et
$1 \leq j \leq n$ $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_j) = 0$

$v_1, \dots, v_{n-1}$ est $j_0, j_1, \dots, j_r$ échelonnée si $j_r < n$
$j_0, \dots, j_{r-1}$ ——— $j_r = n$

Le seul cas non donné par l'hypothèse de récurrence est

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m ; \begin{matrix} r < i \leq m \\ x_i = 0 \end{matrix}\}$$

dans le premier cas $v_n \in \{(x_1, \dots, x_n) ; r < i \leq m, x_i = 0\} = \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$ récurrence $= \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$

donc $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$

Second cas $v_n - x_{r j_r} e_r = v_{j_r} - x_{r, j_r} e_r \in \{(x_1, \dots, x_m) ; r-1 < i \leq m \; x_i = 0\}$

récurrence $= \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 1 \\ \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_{r-1}}) & \text{si } r > 1 \end{cases}$

donc, comme $x_{r, j_r} \neq 0$

$e_r \in \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ et, comme $v_n \in \{(x_1, \dots, x_m) ; r < i \leq m \; x_i = 0\}$

$\{(x_1, \dots, x_m) ; r < i \leq m, x_i = 0\} \subset \mathrm{Vect}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r}) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$
d'où égalité partout. $\square$

<u>Remarque fondamentale</u> Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est injective et (voir Chap. 5) vérifie $\forall x, y \in \mathbb{R}^m ; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

alors si $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$

- $rg(v_1, \ldots, v_n) = rg(f(v_1), \ldots, f(v_n))$
- $Rel(v_1, \ldots, v_n) = Rel(f(v_1), \ldots, f(v_n))$

<u>Exemples</u> ① Soit $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ bijective (une permutation de 1 à m)

$f = f_\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad f_\sigma(x_1, \ldots, x_m) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$

[bijective car $f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} = Id_{\mathbb{R}^m} = f_{\sigma^{-1}} \circ f_\sigma$]

② $1 \leq i \neq j \leq m \quad f = E_{ij}(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad f(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m)$

où si $k \neq i \quad y_k = x_k$

$y_i = x_i + x_j \times a$

[bijective car $E_{ij}(a) \circ E_{ij}(-a) = Id_{\mathbb{R}^m} = E_{ij}(-a) \circ E_{ij}(a)$]

③ $1 \leq i \leq m \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \mu \neq 0 \quad f = H_i(\mu) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad f(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m)$

où si $k \neq i \quad y_k = x_k$

$y_i = x_i \times \mu$

[bijective car $H_i(\mu) \circ H_i(\mu^{-1}) = Id_{\mathbb{R}^m} = H_i(\mu^{-1}) \circ H_i(\mu)$]

La méthode de Gauss (vue en TD) donne si $v_1, \ldots, v_n, v \in \mathbb{R}^m$

- dans un premier temps f composée de f_σ, $E_{ij}(a)$ tq $f(v_1), \ldots, f(v_n), f(v)$ échelonnée [il peut être pratique de prendre aussi des $H_i(\mu)$]

on peut donc déterminer $rg(v_1, \ldots, v_n)$ et $rg(v_1, \ldots, v_n, v)$ c.a.d. répondre à la question $v \in Vect(v_1, \ldots, v_n)$?

Donc $rg(v_1,\dots,v_4) = 3$

si $d \neq b-a$ $\quad rg(v_1\dots,v_4,v) = 4 \neq 3$ le système n'a pas de sol

Si $d = b-a$ $\quad rg(v_1,\dots,v_4,v) = 3$ le système a des solutions

• la renumerotation est $f(v_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, f(v_2)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, f(v_4)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, f(v_3)=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

dernière étape

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \underset{E_{23}^{(-1)}}{\rightsquigarrow} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 0L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \rightarrow L_3 \\ (L_4 \leftarrow L_4) \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 & -1 & b-c-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-a \end{array}$$

$$\underset{E_{12}^{(1)}}{\rightsquigarrow} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & b-c \\ 0 & -1 & 0 & -1 & b-c-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

et (si $d = b-a$) $\quad Rel(v_1, v_2, v_4, v_3) = \left\{ (x_1,x_2,x_4,x_3) ; \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$

$$Rel(v_1,v_2,v_4,v_3,v) = \left\{ (x_1,x_2,x_4,x_3,t) ; \begin{array}{l} x_4 + t(c-a) = 0 \\ x_2 + x_3 + t(a+c-b) \\ x_1 + x_3 + t(c-b) \end{array} \right\}.$$

Les sol^n de $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = v$ sont (faire $t=-1$)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = c - b - x_3 \\ x_2 = b - (a+c) - x_3 \\ x_4 = a - c \end{array} \right.$$

variable auxiliaire

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \underbrace{(c-b,\ b-(a+c),\ 0,\ a-c)}_{\text{sol}^n \text{ particulière}} + x_3 \underbrace{(-1,-1,1,0)}_{\text{sol}^n \text{ du système homogène associé}}$$

(voir plus)