16/10/2006

Rappels

$t=(p,q),\ u=(r,s)\in\mathbb{R}^2$

$\langle t,u\rangle = pr+qs$ produit scalaire de t et u

$\|t\| = \sqrt{\langle t,t\rangle} = \sqrt{p^2+q^2}$ norme de t

Lycée et 6.

$\det(t,u) = ps-qr \quad \left(= \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}\right)$

4 Angles et orientation dans $\mathbb{R}^2$

Lemme Soit $t,u\in\mathbb{R}^2$ $\quad \|t\|^2\|u\|^2 = \langle t,t\rangle\langle u,u\rangle = (\langle t,u\rangle)^2 + (\det(t,u))^2$

pv

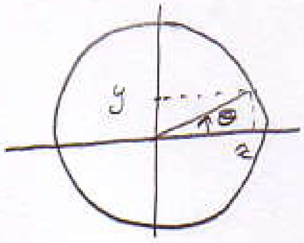
$$(p^2+q^2)(r^2+s^2) \qquad (pr+qs)^2+(ps-qr)^2$$

$$p^2r^2+p^2s^2+q^2r^2+q^2s^2 = (pr)^2+\cancel{2prqs}+(qs)^2+(ps)^2-2psqr+(qr)^2$$

les doubles produits s'envont. □

Cor: Si $t\neq 0\neq u$ le point $\left(\dfrac{\langle t,u\rangle}{\|t\|\,\|u\|}, \dfrac{\det(t,u)}{\|t\|\,\|u\|}\right)$ est sur le

cercle unité $\mathbb{U} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2=1\}$



il y a donc $\theta\in\mathbb{R}$ t.q. $\cos\theta = \dfrac{\langle t,u\rangle}{\|t\|\,\|u\|}$

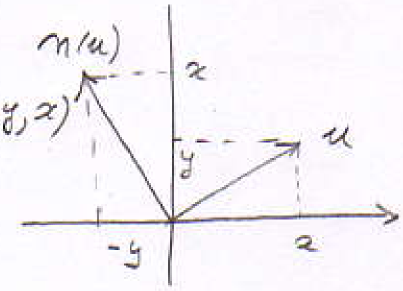
$$\sin\theta = \frac{\det(t,u)}{\|t\|\,\|u\|}$$

deux tels θ sont égaux modulo 2π $\left[\begin{cases}\cos\theta=\cos\theta' \\ \sin\theta=\sin\theta'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{Z} \text{ t.q} \\ \theta'=\theta+k2\pi\end{array}\right]$

l'angle orienté dans $\mathbb{R}^2$ de t à u est

$$\widehat{(t,u)} = \theta \mod 2\pi$$

on a $\widehat{(u,t)} = -\theta \mod 2\pi$ $\quad$ [car $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$; $\langle u,t\rangle = \langle t,u\rangle$ et $\det(u,t) = -\det(t,u)$]



Exemple Soit $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $u=(x,y) \mapsto n(u) = (-y,x)$

on a $\|n(u)\|^2 = (-y)^2 + x^2 = x^2+y^2 = \|u\|^2$

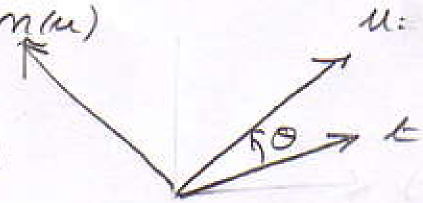
$$\langle u, n(u)\rangle = x(-y) + y\times x = 0 = \|u\|\|n(u)\|\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\det(u,n(u)) = x\times x - y(-y) = x^2+y^2 = \|u\|\|n(u)\| = \|u\|\|n(u)\|\sin\frac{\pi}{2}$$

donc $(\widehat{u, n(u)}) = \frac{\pi}{2}$ et n est la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$
(le quart de tour direct)

Remarques ① si $t=(p,q)$ $u=(r,s)$

$$\langle n(t), u\rangle = -q\times r + ps = ps - qr = \det(t,u)$$



② Le lemme du §2 est
$$\|u\|^2 t = \underbrace{\langle t,u\rangle}_{\mathbb{R}} u - \det(t,u)\, \underbrace{n(u)}_{\in\mathbb{R}^2}$$

donc si $\|t\|\neq 0 \neq \|u\|$ $\quad \|u\|^2 t = \|t\|\|u\|\cos\theta\, u - \|t\|\|u\|\sin\theta\, u'$

soit (en multipliant par le scalaire $\frac{1}{\|u\|^2}$)

$$t = \|t\|\left[\cos\theta \frac{1}{\|u\|}u - \sin\theta\frac{1}{\|u\|}n(u)\right] = \|t\|\left[\cos(-\theta)\frac{1}{\|u\|}u + \sin(-\theta)\frac{1}{\|n(u)\|}n(u)\right]$$

$i = \frac{1}{\|u\|}u$, $j = \frac{1}{\|n(u)\|}n(u)$ est une base orthonormée $\left[\begin{array}{c}\|i\|=1=\|j\| \\ \langle i,j\rangle = 0\end{array}\right]$

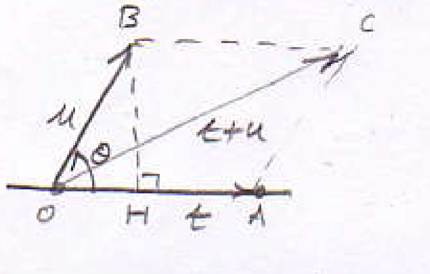
directe $(\widehat{i,j}) = +\frac{\pi}{2}$ mod 2π

Interprétation géométrique de $\langle \vec{OA}, \vec{OB}\rangle$ et $\det(\vec{OA}, \vec{OB})$

$\vec{OC} = \vec{OA}+\vec{OB} = t+u$

$\vec{OA} = t \neq 0 \neq u = \vec{OB}$

H sur la droite OA t.q. $\langle \vec{OA}, \vec{HB}\rangle = 0$
(HB orthogonal à OA)



$$\langle t,u\rangle = \langle \vec{OA},\vec{OB}\rangle = \langle \vec{OA},\vec{OH}+\vec{HB}\rangle = \langle \vec{OA},\vec{OH}\rangle + \overset{0}{\overset{\parallel}{\langle \vec{OA},\vec{HB}\rangle}}$$

$$= \overline{OA}\cdot\overline{OH} = |OA|\cdot|OB|\cos\theta = \|t\|\|u\|\cos\theta$$

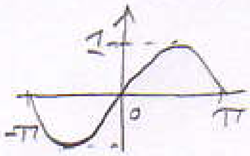
$$\det(t,u) = \det(\vec{OA},\vec{OB}) = \det(\vec{OA},\vec{OH}+\vec{HB}) = \underset{\parallel}{\det(\vec{OA},\vec{OH})} + \det(\vec{OA},\vec{HB})$$

$$|\det(t,u)| = |OA||OB||\sin\theta| = |OA||OH| \qquad \det\left(\vec{OA},\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}\vec{OA}\right)=0$$

est l'aire du parallélogramme OACB, non nul ssi

$\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ne sont pas colinéaire, c.a.d. libre : t,u base de $\mathbb{R}^2$

En ce cas si $\widehat{(t,u)} = \theta \mod 2\pi$ on a $\sin\theta \neq 0$



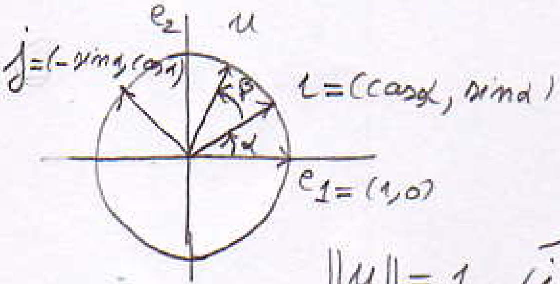
Si $\det(t,u)>0$ on peut choisir θ avec $0<\theta<\pi$ la base est directe / positivement orientée

si $\det(t,u)<0$ ——— $-\pi<\theta<0$ ——— rétrograde / négativement orientée

Remarques ① $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ $f(x,y)=x+iy$ est bijective et $\forall t,u\in\mathbb{R}^2$ on a

$\|t\| = |f(t)|$; $\overline{f(t)}f(u) = |f(t)||f(u)|e^{i\theta} = \langle t,u\rangle + i\det(t,u)$

②



$$\left[\begin{array}{l} \|i\| = 1 = \|j\|,\ \widehat{(i,j)} = +\frac{\pi}{2},\ \widehat{(e_1,i)} = \alpha \mod 2\pi \\ i,j \text{ base orthonormée directe} \end{array}\right]$$

$\|u\| = 1$, $\widehat{(i,u)} = \beta$ $\qquad u = \cos\beta\, i + \sin\beta\, j$

on a $\widehat{(e_1,u)} = \widehat{(e_1,i)} + \widehat{(i,u)} = \alpha+\beta \mod 2\pi$

pv $u = (\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha,\ \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) = (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$

Pratiquement on se souvient de cette relation de Chasles des angles

$$\widehat{(e_1,u)} = \widehat{(e_1,i)} + \widehat{(i,u)}$$

et on refait le calcul pour retrouver les formules d'addition de cos et sin

comparer avec $\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

5 Produit vectoriel et déterminant dans $\mathbb{R}^3$.

Rappel Si $u=(u_1, u_2, u_3)$, $v=(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

le produit scalaire de u et v est $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{3} u_k \cdot v_k$

la norme de u est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} u_i^2}$

si $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle (non orienté) entre u et v $\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\| \cos\theta$

[En particulier $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$ ssi u et v sont liés]

Pour faciliter l'usage de $\sum_{k=1}^{3}$ on convient, si $l \in \mathbb{Z}$ et il y a $n \in \mathbb{Z}$

t.q. $l = 3n + k$ avec $1 \leq k \leq 3$ [k est 1+ reste de la division de l par 3],

que $v_l = v_k$. Ainsi $v_4 = v_1$, $v_5 = v_2$, $v_{k+1} = v_{k-2}$, $v_{k-1} = v_{k+2}$

Le produit vectoriel de u et v est $u \wedge v = (z_1, z_2, z_3)$ où

$$z_k = \begin{vmatrix} u_{k+1} & u_{k+2} \\ v_{k+1} & v_{k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{k+1} & u_{k-1} \\ v_{k+1} & v_{k-1} \end{vmatrix} = u_{k+1} v_{k-1} - u_{k-1} v_{k+1}$$

$$z_1 = u_2 v_3 - u_3 v_1 \ ; \ z_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 \ ; \ z_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

des propriétés du déterminant on tire :

Propriétés 1 Pour tout $u, u', v, v' \in \mathbb{R}^3$; $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$

bilinéarité du produit vectoriel:

(1) $(\lambda u + \lambda' u') \wedge v = \lambda\, u \wedge v + \lambda'\, u' \wedge v$

(1') $u \wedge (\mu v + \mu' v') = \mu\, u \wedge v + \mu'\, u \wedge v'$

(2) $u \wedge u = 0$

(3) $u \wedge v + v \wedge u = \bar{0}$ $\quad (\Leftrightarrow v \wedge u = - u \wedge v)$

PV (1) et (1') et (2) $\Rightarrow$ (3) $\quad 0 = (u+v) \wedge (u+v) = u \wedge (u+v) + v \wedge (u+v)$

$= \underbrace{u \wedge u}_{0} + u \wedge v + v \wedge u + \underbrace{v \wedge v}_{0} = u \wedge v + v \wedge u.$ $\square$

Lemme 1 pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$ $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v

$$\langle u, u \wedge v \rangle = 0 = \langle v, u \wedge v \rangle$$

pv d'après (2) de la propriété 1 il suffit de montrer une égalité

$$\langle u, u \wedge v \rangle = \sum_{k=1}^{3} u_k \begin{vmatrix} u_{k+1} & u_{k-1} \\ v_{k+1} & v_{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} u_k \left(u_{k+1} v_{k-1} - u_{k-1} v_{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} u_k u_{k+1} v_{k-1} - u_k u_{k-1} v_{k+1} = \sum_{k=1}^{3} u_k u_{k+1} v_{k-1} - \sum_{k=1}^{3} u_k u_{k-1} v_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_{i+1} u_{i+2} v_i - \sum_{j=1}^{3} u_{j-1} v_{j-2} v_j = \sum_{i=1}^{3} u_{i+1} u_{i-1} v_i - \sum_{j=1}^{3} u_{j-1} u_{j+1} v_j = 0$$

Lemme 2 pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\|u\|^2 \|v\|^2 = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle = (\langle u, v \rangle)^2 + \|u \wedge v\|^2$$

$$\|u \wedge v\|^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(u_{k+1} v_{k-1} - u_{k-1} v_{k+1} \right)^2 = \sum_{k=1}^{3} u_{k+1}^2 v_{k-1}^2 - 2 u_{k+1} v_{k-1} u_{k-1} v_{k+1} + u_{k-1}^2 v_{k+1}^2$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} u_{\ell+1}^2 v_{\ell-1}^2 - 2 \sum_{k=1}^{3} u_{k+1} v_{k-1} u_{k-1} v_{k+1} + \sum_{m=1}^{3} u_{m-1}^2 v_{m+1}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_{k-2}^2 - 2 \sum_{k=1}^{3} u_{k+1} v_{k-1} u_{k-1} v_{k+1} + \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_{k+2}^2$$

$$(\langle u, v \rangle)^2 = \sum_{k=1}^{3} u_k v_k \left(u_{k-1} v_{k-1} + u_k v_k + u_{k+1} v_{k+1} \right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} u_\ell v_\ell u_{\ell-1} v_{\ell-1} + \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_k^2 + \sum_{m=1}^{3} u_m v_m u_{m+1} v_{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} u_{k-1} v_{k-1} u_{k-2} v_{k-2} + \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_k^2 + \sum_{k=1}^{3} u_{k+1} v_{k+1} u_{k+2} v_{k+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} u_{k-1} v_{k-1} u_{k+1} v_{k+1} + \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_k^2 + \sum_{k=1}^{3} u_{k+1} v_{k+1} u_{k-1} v_{k-1} = \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{3} u_{k+1} v_{k-1} u_{k-1} v_{k+1}$$

donc $(\langle u,v\rangle)^2 + \|u\wedge v\|^2 = \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_k^2 + 2\sum_{k=1}^{3} \cancel{u_{k+1} v_{k-1}} u_{k-1} v_{k+1}$

$$+ \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_{k-2}^2 - 2\sum_{k=1}^{3} u_{k+1} v_{k-1} u_{k-1} v_{k+1} + \sum_{k=1}^{3} u_k^2 v_{k+2}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{3} u_k^2 (v_k^2 + v_{k-2}^2 + v_{k+2}^2) = \sum_{k=1}^{3} u_k^2 (v_k^2 + v_{k+1}^2 + v_{k+2}^2) = \sum_{k=1}^{3} u_k^2 \sum_{l=1}^{3} v_l^2 \quad \square$$

car $u \neq 0 \neq v$ et $\theta \in [0,\pi]$ est l'angle (non orienté) entre u et v

$(\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta)$ on a $\|u\wedge v\| = \|u\|\|v\| |\sin\theta|$

l'aire du parallélogramme construit sur u et v

ainsi $u\wedge v$ est non nul ssi u et v sont linéairement indépendants.

pv $\|u\wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (\langle u,v\rangle)^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta$

$$= \|u\|^2\|v\|^2(1-\cos^2\theta) = \|u\|^2\|v\|^2\sin^2\theta . \quad \square$$

<u>Remarque</u> si $u,v \in \mathbb{R}^3$ sont unitaires orthogonaux $(\|u\| = 1 = \|v\|, \langle u,v\rangle = 0)$

alors $u\wedge v$, qui (Lemme 1) est orthogonal à u et v, est unitaire

$$[\,\|u\wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (\langle u,v\rangle)^2 = \|u\|^2\|v\|^2 = 1\,]$$

et $u, v, u\wedge v$ est une base orthonormée.

Le produit vectoriel permet à partir de deux vecteurs unitaires orthogonaux u et v d'en choisir un $u\wedge v$ parmi les deux vecteurs unitaires orthogonaux à u et à v. On dit que la base $(u, v, u\wedge v)$ est orthonormée directe

fin 16/10/2008

Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Le déterminant de u, v et w est

$$\det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle$$

Propriétés 2 Pour tout $u, u', v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu' \in \mathbb{R}$ on a

trilinéarité du déterminant

(1) $\det(\lambda u + \lambda' u', v, w) = \lambda \det(u, v, w) + \lambda' \det(u', v, w)$

(1') $\det(u, \mu v + \mu' v', w) = \mu \det(u, v, w) + \mu' \det(u, v', w)$

(1'') $\det(u, v, \nu w + \nu' w') = \nu \det(u, v, w) + \nu' \det(u, v, w')$

(2) $\det(u, v, v) = 0$ (2') $\det(u, v, u) = 0$ (2'') $\det(u, u, w) = 0$

(3) $\det(u, w, v) = -\det(u, v, w)$

(3') $\det(w, v, u) = -\det(u, v, w)$

(3'') $\det(v, u, w) = -\det(u, v, w)$

(4) $\det(v, w, u) = \det(u, v, w) = \det(w, u, v)$

pr: (1'') suit de la bilinéarité du produit scalaire

(1) (1') suivent des bilinéarités des produits vectoriels et scalaires

(2) et (2') suivent de L1 ($u \wedge v$ orthogonal à u et v)
(2'') de P1 (2) $u \wedge u = 0$

(3) suit de (2) (3') de (2') (3'') de (2'') comme ds P1

(4) $\det(v, w, u) = -\det(v, u, w) = - \times (-\det(u, v, w))$

$\det(w, u, v) = -\det(u, w, v) = - \times (-\det(u, v, w))$

<u>Notation</u> $\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

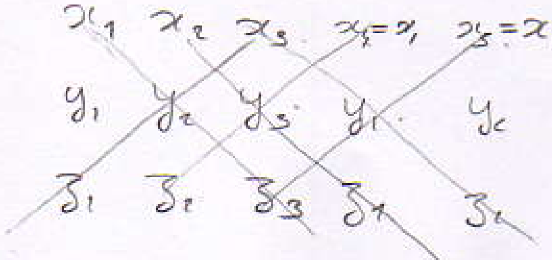
Cor1 (règle de Sarrus et multiplicativité du déterminant

Soit $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^3$

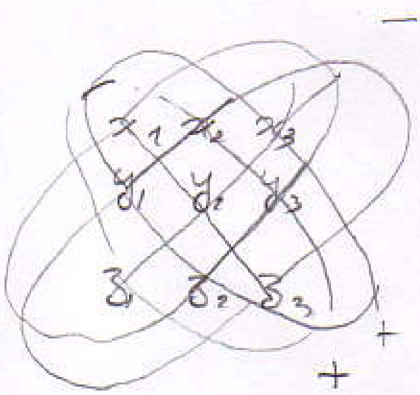
$$u = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$$
$$v = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3$$
$$w = z_1 f + z_2 f_2 + z_3 f_3$$

$$\det(u,v,w) = (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2)\det(f_1, f_2, f_3)$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \det(f_1, f_2, f_3)$$



ou



$-z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2 \quad + x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2$

pv on developpe $\det(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3, y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3, z_1 f_1 + z_2 f_2 + z_3 f_3)$

il y a $3 \times 3 \times 3 = 27$ termes du typ $x_i y_j z_k \det(f_i, f_j, f_k)$ où $i,j,k \in \{1,2,3\}$ mais tous ceux pour lesquels deux indices sont égaux sont nuls il reste 6 termes.

le resultat suit de $\det(f_1, f_2, f_3) = \det(f_2, f_3, f_1) = \det(f_3, f_1, f_2)$

$\det(f_3, f_2, f_1) = \det(f_1, f_3, f_2) = \det(f_2, f_1, f_3) = -\det(f_1, f_2, f_3)$

pour la seconde égalité on applique la première à $\begin{array}{l} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_2 \\ f_3 = e_3 \end{array}$

et remarque $\det(e_1, e_2, e_3) = \langle e_1 \wedge e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$

Cor 2 Soit $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^3$ alors f_1, f_2, f_3 est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi

$$\det(f_1, f_2, f_3) \neq 0$$

Pv 1) f_1, f_2, f_3 génératrice $\Rightarrow \det(f_1, f_2, f_3) \neq 0$

ds cor 1 $u = e_1, v = e_2, w = e_3$ $\quad 1 = \det(e_1, e_2, e_3) = | \quad | \det(f_1, f_2, f_3)$

donc $\det(f_1, f_2, f_3) \neq 0$

2) $\det(f_1, f_2, f_3) \neq 0 \Rightarrow f_1, f_2, f_3$ libre $\Leftrightarrow$ (f_1, f_2, f_3 liée $\Rightarrow \det(f_1, f_2, f_3) = 0$)

$0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$ quitte à permuter les f_k on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$

$\lambda_1 \det(f_1, f_2, f_3) = \lambda_1 \det(f_1, f_2, f_3) + \lambda_2 \underbrace{\det(f_2, f_2, f_3)}_{0} + \lambda_3 \underbrace{\det(f_3, f_2, f_3)}_{0}$

$= \det(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3, f_2, f_3) = \det(0, f_2, f_3) = 0$

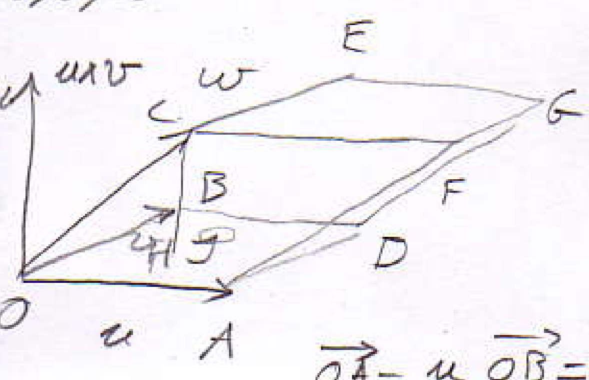
donc $\det(f_1, f_2, f_3) = 0$

on conclu puisque ds $\mathbb{R}^3$ (f_1, f_2, f_3) libre $\Leftrightarrow (f_1, f_2, f_3)$ génératrice

$\Updownarrow$

(f_1, f_2, f_3) est une base $\square$

Interprétation géométrique $|\det(u, v, w)|$ est le volume du parallélépipède construit sur u, v, w



$|u \wedge v| =$ aire du parallélogramme sur u et v

hauteur du pallélipipède sur u, v et w

$|CH| = \langle \frac{1}{\|u \wedge v\|} u \wedge v, \vec{OC} \rangle$

volume $\|u \wedge v\| \, |CH| = |\langle u \wedge v, w \rangle|$

$\vec{OA} = u \quad \vec{OB} = v$

$\vec{OC} = w . \square$

6. Produit scalaire

Le produit scalaire $\left\{\begin{array}{l}\text{standard}\\ \text{usuel}\end{array}\right.$ sur $\mathbb{R}^n$ est

$$\langle\ ,\ \rangle_{std} = \langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Propriétés $\forall u, u', v, v' \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ on a

symétrie (1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

bilinéarité $\left\{\begin{array}{ll}(2) & \langle \lambda u + \lambda' u', v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle + \lambda' \langle u', v\rangle \\ (2') & \langle u, \mu v + \mu' v'\rangle = \mu \langle u, v\rangle + \mu' \langle u, v'\rangle\end{array}\right.$

défini positif $\left\{\begin{array}{ll}(3) & \langle u, u\rangle = 0 \text{ ssi } u = 0 \\ (4) & \langle u, u\rangle \geqslant 0\end{array}\right.$

pv (1) et (2) exercice sur $\sum_{k=1}^{n}$ et ptés de + et $\times$ de $\mathbb{R}$

(1) et (2) $\Rightarrow$ (2')

pour tout $t \in \mathbb{R}$ $t^2 \geqslant 0$ et $t^2 = 0$ ssi $t = 0$ donc

$\langle u, u\rangle = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \geqslant 0$ c.a.d (4)

$= 0$ ssi $x_1 = 0, \dots, x_k = 0$ c.a.d. $u = 0$ (3). $\square$

Un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés (1), (2), (3) et (4) [et donc (2')]

$u, v \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux pour $\langle\ ,\ \rangle$ si $\langle u, v\rangle = 0$

(par esc std

Exemple Soit $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$ et $\langle , \rangle_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un produit scalaire

alors $\langle , \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\langle (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \rangle = \langle \sum_{k=1}^m x_k w_k, \sum_{k=1}^m y_k w_k \rangle_{std}$

est un produit scalaire ssi la famille $w_1, \dots, w_m$ est libre

pv Exercice $\langle , \rangle$ vérifie toujours (1) (2) et (4)

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle u, u \rangle = \langle \sum_{k=1}^m x_k w_k, \sum_{k=1}^m x_k w_k \rangle_{std} \underset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^m x_k w_k = 0$$

$$\underset{w_1, \dots, w_m \text{ libre}}{\Rightarrow} (x_1, \dots, x_m) = 0 \quad \text{c.a.d. } \langle , \rangle \text{ vérifie (3)}$$

(contraposé de $\Leftarrow$) : Si $w_1, \dots, w_m$ liée $\exists\, u = (x_1, \dots, x_m) \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ $\sum_{k=1}^m x_k w_k = 0$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} 0 = \langle \sum_{k=1}^m x_k w_k, \sum_{k=1}^m x_k w_k \rangle_{std} = \langle u, u \rangle \text{ donc } \langle , \rangle \text{ vérifie non (3)} \blacksquare$$

Soit $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad |\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

De plus si $u \neq 0$ et il y a égalité alors il y a $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \lambda u$. □

pv Soit $t \in \mathbb{R}$ d'après (3) on a

$$0 \leq \langle tu + v, tu + v \rangle \underset{(2)}{=} t \langle u, tu + v \rangle + \langle v, tu + v \rangle$$

$$\underset{(2')}{=} t^2 \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$\underset{(1)}{=} t^2 \langle u, u \rangle + t\, 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$

est un trinôme de signe constant donc de (petit) discriminant ≤ 0 :

$$0 \geq (\langle u,v\rangle)^2 - \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \text{ c.a.d. } (\langle u,v\rangle)^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \quad \square$$

si égalité et $\langle u,u\rangle \neq 0$ le trinôme a une racine t et $tu+v=0$ donc $v=(-t)u$ $\square$

La norme associée au produit scalaire $\langle\,,\rangle$ est $\|\ \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

Corollaire $\forall\, u,v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

(1) $\|u\| \geq 0$ et $\|u\| = 0$ ssi $u = 0$

(2) $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$

(3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)

pv (1) et (2) suit de (4)(3), (2) et (2') des propriétés de $\langle\,,\rangle$

(3) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \underset{\uparrow}{=} \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$

calcul de la prop pour $t=1$

$\underset{\substack{C-S\\(\text{Thm})}}{\leq} \langle u,u\rangle + 2\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle + \langle v,v\rangle = (\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle)^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

Remarque $y = y + x + -x$ et $x = x + y + -y$

donc par (3) $\|y\| \leq \|y+x\| + \|-x\| \underset{(2)}{=} \|x+y\| + \|x\|$; $\|x\| \leq \|x+y\| + \|-y\| = \|x+y\| + \|y\|$

donc $\|y\| - \|x\| \leq \|x+y\|$ et $\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$ c.a.d.

(3') $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\|$ (seconde inégalité)

La distance entre $A, B \in \mathbb{R}^n$ est $d(A,B) = \|B-A\|$

Propriétés $\forall A,B,C \in \mathbb{R}^n$ (1) $d(A,B) \geq 0$ et $d(A,B) = 0$ ssi $A = B$

(2) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$ (inégalité triangulaire)

(3) $d(A+C, B+C) = d(A,B)$ invariance par translation

pv de (2) $B-A = B-C + C-A = C-A + B-C$

$$d(A,B) = \|B-A\| = \|C-A + B-C\| \leq \|C-A\| + \|B-C\| = d(A,C) + d(C,B)$$

(3) $d(A+C, B+C) = \|(B+C)-(A+C)\| = \|B-A\| = d(A,B)$

<u>Proposition 1</u> Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$H_{a,b} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \langle a, x\rangle_{st} \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) = b\}$$

$$V_a = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n ; \langle a, u\rangle_{st} \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right) = 0\}$$

(1) $\frac{b}{\langle a,a\rangle} a = \frac{b}{\|a\|^2} a \in H_{a,b}$

(2) Si $x \in H_{a,b}$ alors $H_{a,b} = \{x+u ; u \in V_a\}$

(3) $\forall x \left(= \frac{b}{\langle a,a\rangle} a + u, u \in V_a\right) \in H_{a,b}$ on a

$$d(0,x) = \|x\| \geq \left\|\frac{b}{\langle a,a\rangle} a\right\| = \frac{|b|}{\|a\|} = \frac{|b|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}$$

avec égalité ssi $x = \frac{b}{\langle a,a\rangle} a$

Le point $h = \frac{b}{\langle a,a\rangle} a$ est le point de l'<u>hyperplan affine</u> $H_{a,b}$ le plus proche de 0, c'est la projection orthogonale de 0 sur $H_{a,b}$:

$\forall u \in V_a \quad \langle h, u\rangle = 0$

P.V (1) $\langle a, \frac{b}{\langle a,a\rangle} a\rangle \underset{(2)}{=} \frac{b}{\langle a,a\rangle} \langle a,a\rangle = b$ donc $\frac{b}{\langle a,a\rangle} a \in H_{a,b}$

(2) si $x, y \in H_{a,b}$ et $u = y-x$ on a $y = u + x = x+u$

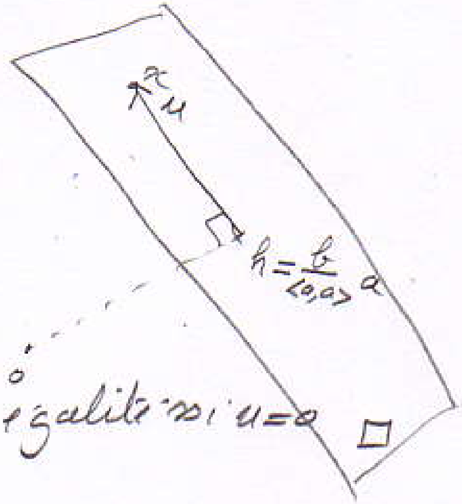
$$\langle a,u\rangle = \langle a, y-x\rangle \underset{(2')}{=} \langle a,y\rangle - \langle a,x\rangle = b - b = 0$$

si $x \in H_{a,b}$ et $u \in V_a$ $\langle a, x+u\rangle = \langle a,x\rangle + \langle a,u\rangle = \langle a,x\rangle$ donc $x+u \in H_{a,b}$

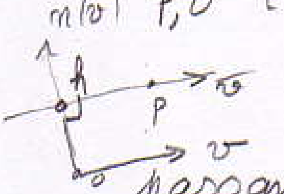
(3) $\|x\|^2 = \|\frac{b}{\langle a,a\rangle} a + u\|^2 = \langle \frac{b}{\langle a,a\rangle} a+u, \frac{b}{\langle a,a\rangle} a+u \rangle$

$$= \left(\frac{b}{\langle a,a\rangle}\right)^2 \langle a,a\rangle + 2\frac{b}{\langle a,a\rangle} \underset{0}{\underset{\|}{\langle a,u\rangle}} + \langle u,u\rangle$$

$$= \frac{b^2}{\langle a,a\rangle} + \langle u,u\rangle \geq \frac{b^2}{\langle a,a\rangle} = \left(\frac{|b|}{\|a\|}\right)^2$$ avec égalité ssi $u=0$ □



Corollaire a) Soit $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$ et $p \in \mathbb{R}^2$ la droite



$$d_{p,v} = \{p + tv ; t \in \mathbb{R}\} = \{q \in \mathbb{R}^2 ; \langle n(v), q\rangle = \langle n(v), p\rangle\}$$
$$= \{q \in \mathbb{R}^2 ; \det(v,q) = \det(v,p)\}$$

passant par p et de vecteur directeur v contient $h = \frac{\langle n(v), p\rangle}{\langle v,v\rangle} n(v)$

c'est le point de $d_{p,v}$ le plus proche de o

$$d(o, d_{p,v}) = \|h\| = \frac{|\langle n(v), p\rangle|}{\sqrt{\langle v,v\rangle}} = \frac{|\det(v,p)|}{\sqrt{\langle v,v\rangle}}$$

b) Soit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ linéairement indépendants et $p \in \mathbb{R}^3$ le plan

$$P_{p;v_1,v_2} = \{p + tv_1 + sv_2 ; t,s \in \mathbb{R}\} = \{q \in \mathbb{R}^3 ; \langle v_1 \wedge v_2, q\rangle = \langle v_1 \wedge v_2, p\rangle\}$$
$$= \{q \in \mathbb{R}^3 ; \det(v_1,v_2,q) = \det(v_1,v_2,p)\}$$

passant par p et de plan vectoriel associé engendré par v_1 et v_2.

contient $h = \frac{\det(v_1,v_2,p)}{\langle v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2\rangle} v_1 \wedge v_2$ c'est le point de $d_{p;v_1,v_2}$

le plus proche de o et

$$d(o, P_{p;v_1,v_2}) = \|h\| = \frac{|\det(v_1,v_2,p)|}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$ □