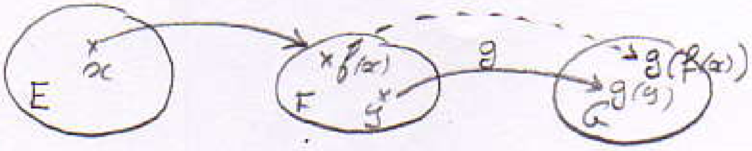
02/10/2006

## 4 Composition d'applications

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications tq but de $f = F =$ source de $g$ ($f$ et $g$ composables)




la composée de $f$ et $g$ est $g \circ f : E \to G$, $g\circ f(x) = g(f(x))$

on note aussi
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

⚠ Noter l'inversion de l'ordre

on dit composée de $f$ et $g$ car il faut calculer d'abord $f(x)$ puis $g(f(x))$ mais on écrit $g\circ f$ car l'"usage" veut qu'on écrive la fct. à gauche de la variable $f(x)$ [et non $(x)f$ comme sur certaines calculatrices]

Exemples a) $a, b \in \mathbb{C}$ $h_a, t_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $t_b(z) = z + b$, $h_a(z) = az$

$t_b \circ h_a(z) = t_b(h_a(z)) = t_b(az) = az + b$

b) Si $A \subset E$ l'inclusion de $A$ dans $E$ est $incl_A^E : A \to E$, $incl_A^E(a) = a$

la composée de $incl_A^E$ avec $f : E \to F$, $f \circ incl_A^E : A \to F$ est

la restriction de $f$ à $A$ $f_{|A} : A \to F$, $f_{|A}(a) = f(a)$

pr si $a \in A$ $f \circ incl_A^E(a) = f(incl_A^E(a)) = f(a)$ $\square$

Rmq a) Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ (avec $g \circ f : E \to G$), $f \circ g$ n'est défini que si $G = E$

Si $G = E \neq F$ on ne peut comparer $g \circ f : E \to E$ et $f \circ g : F \to F$ (pas même source ni m̃ but)

b) Si $G = E = F$ $g \circ f, f \circ g : E \to E$ ont m̃ source et m̃ but

mais sont différentes en général

Exemple $h_a \circ t_b(z) = h_a(z+b) = az + ab \neq az + b = t_b \circ h_a(z)$
$\Updownarrow$ Exercice

$(b \neq 0)$ et $(a \neq 1)$

Exercice a) calculer les produits de $h_a$, $t_b$ et $\sigma$ (conjugaison) dans tous les ordres et avec toutes les parenthèses possibles

$h_a \circ (\sigma \circ t_b)$, $(h_a \circ \sigma) \circ t_b$, $h_a \circ (t_b \circ \sigma)$ ...

b) vérifier que vous avez fait 12 calculs mais qu'il y a (en général) 6 résultats

Proposition Soit $f : E \to F$ une application alors

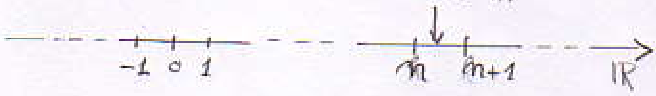
(1) $f \circ Id_E = f$ (2) $Id_F \circ f = f$

(3) Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ f) \circ g$

(associativité de la composition)

## 5 _ Approximation d'un réel par des fractions de dénominateur au plus N

Soit $x \in \mathbb{R}$



la partie entière de $x$ est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n \leqslant x < n+1$ on la note $n = \lfloor x \rfloor$ (ou $[x]$)

la partie fractionnaire de $x$ est $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$

on a ainsi deux applications $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\{\ \} : \mathbb{R} \to [0,1[$ t.q

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$

Soit $N$ un entier positif $\quad N\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto N\cdot x$ mult$^{n}$ par $N$

Exercice La composée de $N\cdot$ et $\lfloor\ \rfloor$ associe à chaque $y \in \mathbb{R}$ l'unique $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\frac{k}{N} \leqslant y < \frac{k+1}{N}$. De plus si $y \in [0,1[$ alors $k$ $\{0,1,\dots,N-1\}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ la composition de

$$\begin{tikzcd}
\{0,1,\dots,N\} \arrow[r, "\cdot\alpha", "m \mapsto m\cdot\alpha"'] \arrow[rrrr, bend right=40, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\{\ \}"] & {[0,1[} \arrow[r, "N\cdot"] \arrow[rr, bend right, "y \mapsto \lfloor Ny \rfloor \text{ de l'exercice}"'] & {[0,N[} \arrow[r, "\lfloor\ \rfloor"] & \{0,1,\dots,N-1\}
\end{tikzcd}$$

est $m \mapsto f(m) = \lfloor N\{m\alpha\} \rfloor = \lfloor N\cdot(m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor) \rfloor$

$\quad \| \;$ notation

$\quad p_m \in \mathbb{Z}$

"comme $\{0,1,\dots,N-1\}$ "a moins d'éléments" que $\{0,1,\dots,N\}$ il y a

$m_1, m_2 \in \{0,1,\dots,N-1\}$ avec $m_1 \neq m_2$ et $\varphi(m_1)=\varphi(m_2)$"

on peut supposer (o.p.s.) $m_1 < m_2$ l'exercice donne

$$\frac{k}{N} \leqslant m_2\alpha - p_2,\ m_1\alpha - p_1 \leqslant \frac{k+1}{N} \quad \text{donc}$$

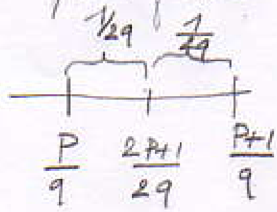
$$\left| m_2\alpha - p_2 - (m_1\alpha - p_1) \right| < \frac{1}{N}$$

$$\parallel$$

$$\Big| \underbrace{(m_2-m_1)}_{q \in \{1,\dots,N\}}\alpha - \underbrace{(p_2-p_1)}_{p \in \mathbb{Z}} \Big| < \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \leqslant \frac{1}{q^2}$$

(sauf si $N=1$)

Ce qui est bien meilleur que $\frac{1}{2q}$ le mieux que l'on peut faire avec des des fractions de dénominateur au plus $q$




Exercice placer sur une droite, avec 10 cm pour unité toutes les fractions $\frac{p}{q}$ avec $1 \leqslant p,q \leqslant 6$ (et $p$ et $q$ premiers entre eux)

6 ** **Injectivité** Soit $f : E \to F$ une application

$f$ est injective si $\forall x_1, x_2 \in E \ \left(f(x_1) = f(x_2)\right) \Rightarrow (x_1 = x_2)$

Réflexe de penser à la contraposée d'une implication

$\left[ \Leftrightarrow \left( (f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftarrow (x_1 \neq x_2) \right) \right.$ c.a.d $f$ envoit des éléments distincts sur des éléments distincts $\Big]$

contraposition

Comme $\left(f(x_1) = f(x_2) \ (= y \in F)\right)$ signifie $x_1$ et $x_2$ sont antécédants de $y \in F$

$f$ injective $\Leftrightarrow$ tout $y$ a au plus 1 antécédant
(1 si $y \in f(X)$ et 0 si $y \notin f(X)$ $\left(= \{f(x) ; x \in X\}\right)$
Rappel

Exemple a) un point important ds 5 était $\varphi$ non injective
$(\exists m_1, m_2 \in \{0, 1, \dots, N-1\} \ (m_1 \neq m_2)$ et $\varphi(m_1) \neq \varphi(m_2))$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ est injective

pv $1 - x_1 = 1 - x_2 \Rightarrow x_1 = 1 - 1 + x_1 = 1 - (1 - x_1) = 1 - (1 - x_2) = x_2$ $\square$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(-1) = 1 = f(1)$ et $-1 \neq 1$
$\left[\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \text{ et non } B)\right]$

mais $f_{|[0, +\infty[} : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est injective

pv $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow 0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{car } ((x_1 + x_2) > 0) \text{ ou } (x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0)} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

donc $\neq 0$

d) Si $A \subset X$ $\mathrm{incl}_A^X : A \hookrightarrow X$ $\mathrm{incl}_A^X(a) = a$

pv $\mathrm{incl}_A^X(a_1) = \mathrm{incl}_A^X(a_2) \Rightarrow a_1 = \mathrm{incl}_A^X(a_1) = \mathrm{incl}_A^X(a_2) = a_2$ $\square$

$f$ est surjective si $\forall y \in F$ $\exists x \in F$ tq $f(x) = y$ :

tout élement $y$ du but $F$ a un antécédant, au $Y = f(E) \left(= \{f(x) ; x \in E\}\right)$

$f$ est bijective si elle est surjective et injective (bi ~ deux en grec)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall y \in F\ \exists x \in E\ \text{t.q.}\ f(x) = y \\ (ii)\ \forall x_1, x_2 \in E\quad \big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Rightarrow (x_1 = x_2) \end{cases}$$

c.a.d tout élement $y$ du but a un et un seul antécedant.

Ainsi on peut définir l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$

qui à $y \in F$ associe son unique antécedant : le $x$ tq $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$

⚠ Cette application $f^{-1} : F \to E$ n'existe que si $f$ est bijective

ne pas la confondre avec $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ qui est toujours définie.

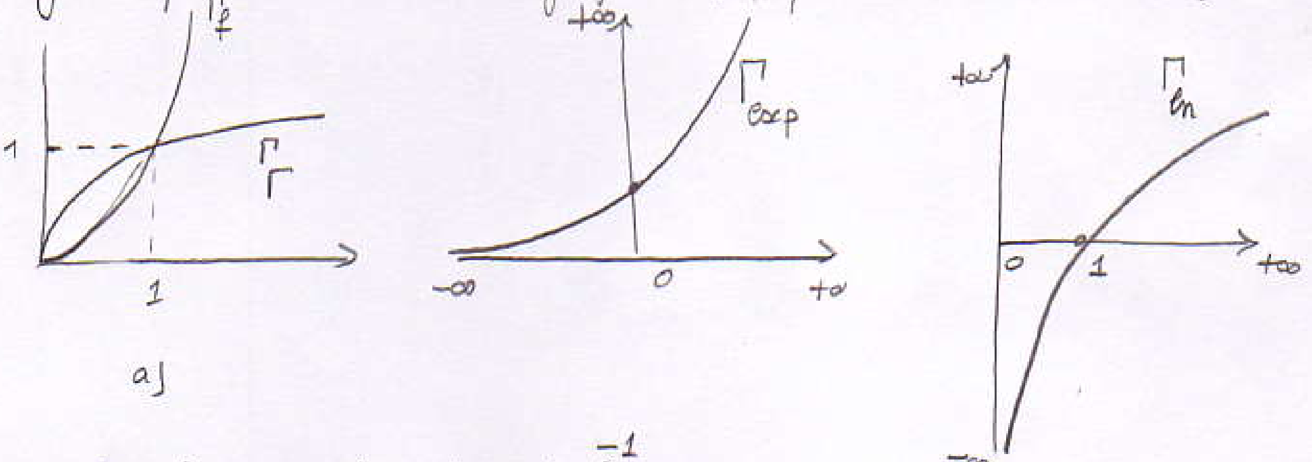
Danger de l'abreviation $f^{-1}(y)$ pour $f^{-1}(\{y\})$ !!!

Exemples a] $f : [0,+\infty[ \to [0,+\infty[$ $f(x) = x^2$ est bijective, son application réciproque est $\sqrt{\ } : [0,+\infty[ \to [0,+\infty[$

b] $\exp : \mathbb{R} \to ]0,+\infty[$ $\exp(x) = e^x$ est bijective, son application réciproque est

$$\ln : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$$

Remarque Si $\Gamma_f \subset E \times F$ est le graphe de $f : E \to F$ bijective le graphe de $f^{-1} : F \to E$ est $\Gamma_{f^{-1}} = \{(y,x) \in F \times E ;\ (x,y) \in \Gamma_f\}$ le "symétrique" dans $F \times E$ du graphe de $f$ (qui lui est dans $E \times F$)




Lemme Soit $f : E \to F$ bijective et $f^{-1} : F \to E$ son application réciproque

(1) $f \circ f^{-1} = Id_F$ (2) $Id_E = f^{-1} \circ f$

pr (1) $\forall y \in F$ $f^{-1}$ est un (l'unique) antécédant de $y$ donc $f(f^{-1}(y)) = y$ (*)

et $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y = Id_F(y)$

(2) $\forall x \in E$ $x$ est antécédant de $f(x)$ or il y en a un seul $f^{-1}(f(x))$ donc $x = f^{-1}(f(x))$

$Id_E(x) = x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x)$

non fait en cours
donné en exercice dans la pr de Cal2

<u>Proposition</u> Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ alors

(1) ($f$ injective) et ($g$ injective) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ injective)

(2) ($f$ surjective) et ($g$ surjective) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ surjective)

(3) ($g \circ f$ injective) $\Rightarrow$ ($f$ injective)

(4) ($g \circ f$ surjective) $\Rightarrow$ ($g$ surjective)

pv (1) $\forall x_1, x_2 \in E$ t.q $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ donc (défⁿ de $g \circ f$)

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } g \text{ injective}}}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \text{ injective}}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

(2) Exercice

(3) $\forall x_1, x_2$ tq $f(x_1) = f(x_2)$ on a $\left(g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)\right) \underset{g \circ f \text{ injective}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

(4) $g \circ f$ surjective donc $\forall z \in G \; \exists x \in E$ tq $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ donc $\exists y \in F$ tq $z = g(y)$
$(y = f(x))$ $\square$

<u>Corollaire 1</u> Soit $A, B, C, D$ des ensembles avec $A \subset B$ et $C \subset D$ alors pour toute application $h : B \to C$ on a

(1) ($h$ injective) $\Rightarrow$ ($h_{|A} = h \circ incl_A^E$ injective)

(2) ($h$ injective) $\Leftrightarrow$ ($incl_C^D \circ h : B \to D$ injective)

pv (1) et $\Rightarrow$ de (2) sont (1) de la prop. avec $f = incl_A^B$ et $g = h$

$f = h$ et $g = incl_C^D$

$\Leftarrow$ de (2) est (3) —— $f = h$ et $g = incl_C^D$ $\square$

Cor 2 Soit $f : E \to F$ alors $f$ est bijective si et seulement si

il y a $g : F \to E$ tq $(g \circ f = Id_E)$ et $(f \circ g = Id_F)$. En ce cas $g = f^{-1}$,

de plus (en changeant les rôles de $f$ et $g$) $g$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = g^{-1} = f$

pv $\Rightarrow$ on prend $g = f^{-1}$, c'est le lemme

$\Leftarrow$ $(g \circ f = Id_E) \underset{(3)\text{ de prop}}{\Rightarrow} f$ injective ; $(f \circ g = Id_F) \underset{(4)\text{ de prop}}{\Rightarrow} f$ surjective

donc $f$ est bijective et $f^{-1} = Id_E \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) \underset{\uparrow \text{ lemme}}{=} g \circ Id_F = g$ $\Pi$

non donné en cours peut en TD ex 6 sp 2

Exemple $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = 2x$ ; $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si $n = 2k$ $f(n) = k$
si $2 \nmid n$ $f(n) = 0$

$g \circ f(n) = g(2n) = n$ donc $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ mais $f$ non surjective $\nexists n \in \mathbb{N}$ $f(n) = 1$
$g$ non injective $(g(0) = 0 = g(1))$

Il faut donc les <u>deux</u> $g \circ f = Id_E$ <u>et</u> $f \circ g = Id_F$ pour assurer $f$ bijective $\square$

Cor 3 Soit $E \xrightarrow{h} F \xrightarrow{k} G$ avec $f$ bijective et $g$ bijective alors
(1) $k \circ h$ bijective (2) $(k \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ k^{-1}$

pv (1) suit de (1) et (2) de la prop.

(2) $(k \circ h) \circ (h^{-1} \circ k^{-1}) = k \circ (h \circ h^{-1}) \circ k^{-1} = k \circ Id_E \circ k^{-1} = k \circ k^{-1} = Id_G$

$(h^{-1} \circ k^{-1}) \circ (k \circ h) = h^{-1} \circ (k^{-1} \circ k) \circ h = h^{-1} \circ Id_F \circ h = h^{-1} \circ h = Id_G$

il suffit d'appliquer Cor 2 avec $f = k \circ h$ et $g = h^{-1} \circ k^{-1}$

Remarque $k = g$ de l'exemple et $h = f$ (de l'ex) montre que la ré-proque est fausse

## 7 Cardinal d'un ensemble fini

**Lemme 1** Soit $X$ un ensemble, $m$ un entier positif $(m \in \mathbb{N}, m > 0)$ et $g : \{1, \dots, m\} \to X$ surjective alors il y a $f : X \to \{1, \dots, m\}$ t.q. $g \circ f = Id_X$. En particulier $f$ est injective.

pv Comme $g$ est surjective $\forall x \in X$ $g^{-1}(\{x\})$ est une partie non vide de la source $\{1, \dots, m\}$ de $g$ et donc a un plus petit élément

$$f : X \to \{1, \dots, m\},\ x \mapsto f(x) = \text{le} \ \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \text{de } g^{-1}(\{x\})$$

on a $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$ puisque $f(x) \in g^{-1}(\{x\})$ donc $g \circ f = Id_X$

Comme $Id_X$ est injective (3) de la prop (de 6) donne $f$ injective □

**Lemme 2** Soit $m$ et $n$ deux entiers positifs et $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ injective alors $m \leq n$

**Cor 1** Soit $M$ et $N$ deux entiers positifs et $g : \{1, \dots, M\} \to \{1, \dots, N\}$ surjective alors $M \geq N$

pv Lemme 1 (avec $m = M$, $X = \{1, \dots, N\}$) donne $f : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, M\}$ injective

Lemme 2 (avec $m = N$ et $n = M$) donne $N \leq M$ c.a.d $M \geq N$. □

Rmq la contraposée de Lemme 2 est si $m > n$ et $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ alors $f$ non injective [crucial dans 5 $\{0, \dots, N-1\} \xrightarrow{\varphi} \{0, \dots, N\}$ non injective]

Rmq Si $X$ est un ensemble t.q. il y a $f : X \to \emptyset$ alors $X = \emptyset$

un ensemble $X$ est fini si il y a $n \in \mathbb{N}$ et une application bijective (bijection)

$$f : X \longrightarrow \{k \in \mathbb{N} ; 1 \leq k \leq n\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 0 \\ \{1, \dots, n\} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Si $f' : X \to \{k \in \mathbb{N} ; 1 \leq k \leq n'\}$ est une autre bijection alors

soit $n = 0$ donc (Rmq) $X = \emptyset$ et $n' = 0$

soit $n > 0$ donc $X \neq \emptyset$ et $n' > 0$ ainsi $f' \circ f^{-1} : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{f^{-1}} X \xrightarrow{f'} \{1, \dots, n'\}$

est bijective donc injective et (lemme 2) $n \leq n'$

surjective et (cor 1) $n \geq n'$ c.a.d $n = n'$

c'est le nombre d'éléments ou cardinal de $X$ on le note $\mathrm{card}(X)$

un ensemble $X = \{x\}$ de cardinal 1 est dit singleton

Rmq on trouve aussi la notation $\#(X)$ pour $\mathrm{card}(X)$

Cor 2 Soit $A \subset X$ une partie d'un ensemble fini $X$ alors $A$ est fini et $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(X)$

pv Si $f : \{k \in \mathbb{N} ; 1 \leq k \leq m\} \to A$ est injective alors la composée

$$\{k \in \mathbb{N} ; 1 \leq k \leq m\} \xrightarrow{f} A \xrightarrow{ind_A^X} X \xrightarrow{F} \{l \in \mathbb{N} ; 1 \leq l \leq n = \mathrm{card}\, X\}$$

est injective donc (L2) $m \leq \mathrm{card}\, X$ et il y a un plus grand tel $m$.

Affirmation si $m$ est maximum $f$ est surjective (donc bijective et $\mathrm{card}(A) = m \leq \mathrm{card}(X)$)

contraposée $m$ non maximum $\Leftarrow$ $f$ non surjective

pv $a \in A \cap {}^c f(\{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k \leq m\})$ $f': \{k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k \leq m+1\} \to A$, $f'(m+1) = a$

$k \leq m$ $f'(k) = f(k)$

alors (Exercice) $f'$ est injective (et $m < m+1$). $\square$

<u>Proposition</u> Soit $A \subset X$ alors $A$ est fini si et seulement si

$A$ et ${}^cA$ sont finis. En ce cas $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}({}^cA)$

pv $\Rightarrow$ car 2 puisque $A \subset X$ et ${}^cA \subset X$

$\Leftarrow$ Si $A = \emptyset$ alors $X = {}^cA$ et $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}({}^cA) = \overset{0}{\mathrm{card}(A)} + \mathrm{card}({}^cA)$

si ${}^cA = \emptyset$ alors $X = A$ $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A) + \underset{0}{\mathrm{card}({}^cA)}$

Sinon Soit $f: A \to \{1, \dots, n\}$ et $f_c: {}^cA \to \{1, \dots, m\}$ bijectives

$F: X \to \{1, \dots, n+m\}$ si $x \in A$ $F(x) = f(x)$

si $x \notin A$ (donc $x \in {}^cA$) $F(x) = n + f_c(x)$

$G: \{1, \dots, m+n\} \to X$ si $1 \leq k \leq n$ $G(x) = f^{-1}(k)$

si $n+1 \leq k \leq n+m$, $k-n \in \{1, \dots, m\}$ $G(x) = f_c^{-1}(k-n)$

Exercice $G \circ F = Id_X$ et $F \circ G = Id_{\{1, \dots, n+m\}}$

donc $F$ est bijective et $\mathrm{card}(X) = n+m = \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}({}^cA)$ $\square$

<u>Théorème</u> Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ alors

(1) $(f \text{ injective}) \Rightarrow (\mathrm{card}(E) \leqslant \mathrm{card}(F))$

(2) $(f \text{ surjective}) \Rightarrow (\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(F))$

(3) $\Big((\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)) \text{ et } (f \text{ injective})\Big) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ surjective} \\ \text{donc bijective}\end{array}\right)$ donc f bijective

(4) $\Big((\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)) \text{ et } (f \text{ surjective})\Big) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ injective} \\ \text{donc bijective}\end{array}\right)$

pr (3) $E \underset{\text{bijective}}{\xrightarrow{f'}} f(E) \subset F$ donc $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(f(E))$

$$\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{card}(E) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypothèse}}}{\overset{\downarrow}{=}} \mathrm{card}(F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop}}}{=} \mathrm{Card}(f(E)) + \mathrm{Card}(\complement f(E))$$

donc $\mathrm{card}(\complement f(E)) = 0$ c.a.d $\complement f(E) = \emptyset$ soit $f(E) = F$. f surjective.

Exercice. déduire (1) et (2) de Lemme 2 et cor 1 et (4) de Lemme 1 et (3).

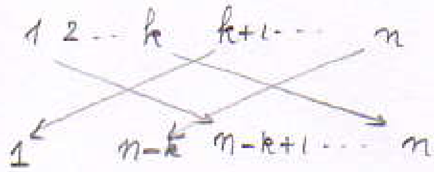
Exercices. Si X et Y sont des ensembles finis alors

- $X \times Y$ est fini et $\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X) \times \mathrm{card}(Y)$
- L'ensemble $Y^X$ des applications de X dans Y est fini et $\mathrm{card}(Y^X) = (\mathrm{card}\, Y)^{\mathrm{card}\, X}$
- L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X est fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(X)) = \mathrm{card}(\{0,1\}^X) = 2^{\mathrm{card}\, X}$.

Rmq $\underset{\text{f} \mapsto \Gamma_f}{Y^X \subset \mathcal{P}(X \times Y)}$ donc $(\mathrm{card}\, Y)^{\mathrm{card}\, X} = \mathrm{card}(Y^X) \leqslant \mathrm{card}\, \mathcal{P}(X \times Y) = 2^{\mathrm{card}(X)\mathrm{card}(Y)} = \left(2^{\mathrm{card}\, Y}\right)^{\mathrm{card}(X)}$ $[n \leqslant 2^n]$

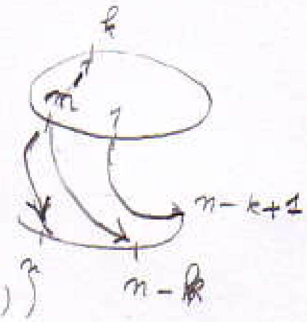
reste à prouver le Lemme 2 :

$k\in\{1,\dots,n\}$ $\quad \sigma_k:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$




$1\leqslant l\leqslant k \quad \sigma_k(l)=l+n-k$

$k+1\leqslant l\leqslant n \quad \sigma_k(l)=l-k$




$\nu_k:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$

$1\leqslant l\leqslant n-k \quad \nu_k(l)=l+k=l+(n-(n-k))$

$n-k+1\leqslant l\leqslant n \quad \nu_k(l)=l+k-n=l-(n-k)$

$1\leqslant l\leqslant k \quad \nu_k\circ\sigma_k(l)=\nu_k(\sigma_k(l))=\nu_k(l+n-k)=l+n-k-(n-k)=l$

$n-k+1\leqslant l\leqslant n$

$k+1\leqslant l\leqslant n \quad \nu_k\circ\sigma_k(l)=\nu_k(\sigma_k(l))$

$=\nu_k(l-k)=l-k+k=l$

$1\leqslant l-k\leqslant n-k$

donc $Id=\nu_k\circ\sigma_k$

mais $\nu_k=\sigma_{n-k}$ et en changeant $k$ en $n-k$

$$Id=\nu_{n-k}\circ\sigma_{n-k}=\sigma_{n-(n-k)}\circ\nu_k=\sigma_k\circ\nu_k$$ et $\sigma_k$ bijection

$\sigma_k$ c'est une bijection la permutation circulaire qui décale "de $k$ à gauche" (et donc "de $n-k$ à droite")

pv de Lemme 2 par récurrence sur $m$

comme $n$ entier positif $n\geqslant 1$ donc si $m=1$ on a $m\leqslant n$

Soit $m>1$ alors $m-1\geqslant 1$ Soit $k=f(m)\in\{1,\dots,n\}$

et $f'=\sigma_k\circ f:\{1,\dots,m\}\xrightarrow{f}\{1,\dots,n\}\xrightarrow{\sigma_k}\{1,\dots,n\}$ on a $f'(m)=\sigma_k(f(m))=$
$=\sigma_k(k)=n$

Si $1 \leq k \leq m-1$ alors $k \neq m$ donc $f'(k) \neq m$ et
(f' injective)

$f'(k) \in \underbrace{\{ l \in \mathbb{N} ; 1 \leq l \leq n-1 \}}_{} = \{1, \ldots, n-1\}$ car $k=1$ vérifie $1 \leq k \leq m-1$

donc $\neq \emptyset$ et $n > 1$ ainsi $f'$ définit

$$f'' : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, n-1\} \quad f''(l) = f'(l)$$

Exercice $f''$ est injective

l'hypothèse de récurrence donne donc $m-1 \leq n-1$ d'où $m \leq n$. $\square$

ouf!!