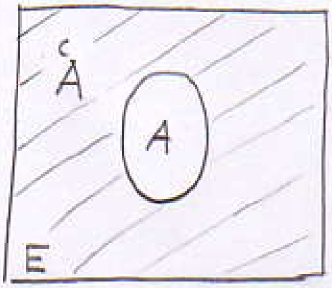
25/09/2006

3 Opérations sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E.

Soit A, B deux parties d'un ensemble E (soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$)

Le complémentaire de A (dans E) est

$$ {}^{c}A \overset{\text{def}}{=} \{x \in E ; x \notin A\} $$

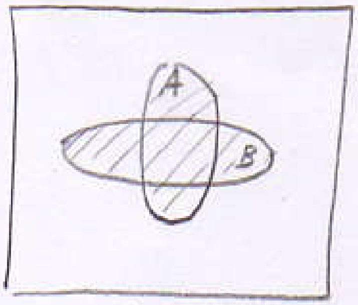


Exemple a) ${}^{c}E = \emptyset$; ${}^{c}\emptyset = E$

b) Si $E = \mathbb{Z}$ $A = \{2m ; m \in \mathbb{Z}\}$, ${}^{c}A = \{2m+1 ; m \in \mathbb{Z}\}$ ensemble des entiers impairs

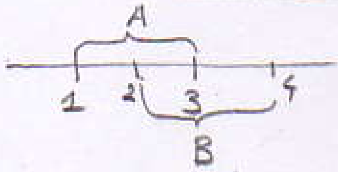
L'union de A et de B est

$$ A \cup B = \{x \in E ; (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\} $$



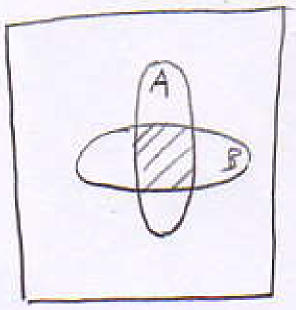
Exemple c) $E = \mathbb{R}$, $A = [1, 3]$, $B = [2, 4]$

$$ A \cup B = [1, 4] $$



L'intersection de A et de B est

$$ A \cap B = \{x \in E ; (x \in A) \text{ et } (x \in B)\} $$



Exemple c') $[1, 3] \cap [2, 4] = [2, 3]$
$[1, 2] \cap [3, 4] = \emptyset$

d) $\{2m ; m \in \mathbb{Z}\} \cap \{3m ; m \in \mathbb{Z}\} =$

$$ = \{2m ; m \in \mathbb{Z}, 3 \mid 2m\} = \{2m ; m \in \mathbb{Z}, 3 \mid m\} = \{2 \times 3\ell ; \ell \in \mathbb{Z}\} $$

(car "3 est premier à 2")

$$ \| $$

$$ \{6\ell ; \ell \in \mathbb{Z}\} $$

ensemble des multiples de 6

En appliquant le thm de 2.1 on obtient

Thm Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E alors

(1) $A \cup B = B \cup A$ (2) $A \cap B = B \cap A$ commutativité de $\cup$ et $\cap$

(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ associativité ———

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivité de $\cap$ sur $\cup$

(6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ ——— $\cup$ — $\cap$

(7) $^c(^cA) = A$

(8) $^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$

(9) $^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$

Proposition Soit A, B, C des parties d'un ensemble E avec $A \subset B$ alors

(1) $^cA \supset {}^cB$

(2) $A \cup C \subset B \cup C$

(3) $A \cap C \subset B \cap C$

(4) $A \cap A = A = A \cup A$

pv de (1) $A \subset B$ est si $x \in E$ $\quad x \in A \Rightarrow x \in B$

$\Updownarrow$ contraposition

$^cA \supset {}^cB$ est ——— $\quad x \notin A \Leftarrow x \notin B$

$\square$

2.3 Quantificateurs.

Dans 2.1 et 2.2 les lettres avaient plusieurs significations.

a) $a, b \in \mathbb{Z}$ $a | b$ si $b = a \times c$ où $c \in \mathbb{Z}$

[a et b sont donnés et on demande qu'il y ait un c t.q...]

b) (si $n \in \mathbb{Z}$) $(n > 0) \Rightarrow (n \geqslant 2)$ est faux

car en substituant $n = 1$ dans $\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{sa négation} \\ \text{son contraire}\end{array}\right.}$ la forme équivalente de $(n>0)$ et non$(n \geqslant 2)$

on obtient l'énoncé vrai $(1>0)$ et $(1 \ngeqslant 2)$

c) (si $n \in \mathbb{Z}$) $(n > 0) \Rightarrow (n \geqslant 1)$ est vrai

car si on substitue à n chaque entier on obtient un énoncé vrai
(une table de vérité à une infinité de lignes !)

Les quantificateurs permettent de préciser "la bonne signification"

1 Le quantificateur existentiel $\exists$ il existe

$\exists x, x \in E$ (abrégé en $\exists x \in E$)

exprime que l'ensemble E est non vide (en symboles $E \neq \emptyset$)

sa négation $\nexists$ il n'existe pas $\nexists x, x \in E$ (abrégé $\nexists x \in E$)

exprime que E est vide ($E = \emptyset$)

Exemple a) $\nexists x \in \{x \in \mathbb{R} ; x^2 = -1\}$ signifie $\{x \in \mathbb{R} ; x^2 = -1\} = \emptyset$

$\exists x \in \{x \in \mathbb{R} ; x^7 - 8x + 1 = 0\}$ est vrai car une équation réelle de degré impair a une racine réelle

b) <u>Remarque</u> il y a des implications du type

$$x \in C \Rightarrow x \in H$$

qui sont vraies mais n'ont aucun intérêt si $C = \emptyset$

(ou tant que l'on a pas montré $\exists x \in C$)

Exemple $C = \{$étudiants de Mat112 chanceux$\}$

$H = \{$étudiants qui ont l'examen en répondant au hasard$\}$.

On emploie aussi $\exists$ avec des propositions :

Si $P(x)$ est une proposition dépendant de x

pour exprimer qu'il y a un x tel que $P(x)$ est vraie

$$\exists x \; P(x) \; [\text{en "dilaté" } \exists x, \underbrace{\text{t.q.}}_{\text{mot de liaison}} \, P(x)]$$

Si ce x est élément d'un ensemble on a donc

$$(\exists x \; P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \{y \in E ; P(y)\}) (\Leftrightarrow \{x \in E ; P(x)\} \neq \emptyset)$$

Rmq $\{y \in E ; P(y)\} = \{x \in E ; P(x)\}$ [x et y sont des "variables muettes" comme k dans $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$]

Exemples a] Si a et b sont des entiers

$$(a \mid b) \overset{\text{Def}}{=} (\exists c \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } b = a \times c)$$

b] $\exists n \in \mathbb{Z}$ tq $(n > 0)$ et non$(n \geqslant 2)$ est vrai

(car $n = 1$ est un tel élément)

2 Le quantificateur universel $\forall$ pour tout

ne s'emploie qu'avec des propositions

$$\forall x \quad P(x)$$

se lit pour tout x $\left|\begin{matrix}\text{alors} \\ \text{on a}\end{matrix}\right)$ $P(x)$ est vrai

mot de liaison

est par définition non$(\exists x$ non$(P(x)))$

[aussi noté $\nexists x$ non$(P(x))$] équivaut donc à

"il n'y a pas de x tel que $P(x)$ est fausse"

ou (si x est élément d'un ensemble E) $\{x \in E ; \text{non}(P(x))\} = \emptyset$

Exemples a] $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n > 0) \Rightarrow (n \geqslant 1)$

b] Si E et F sont des ensembles l'inclusion $E \subset F$ se traduit par

$$\forall x \in E \quad x \in F$$

3 Négation de propositions avec quantificateurs.

(1) $\text{non}\left(\exists x\ (\in E)\ \text{t.q. } P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x\ (\in E)\ \text{alors non}(P(x))\right)$

(2) $\text{non}\left(\forall x\ (\in E)\ \text{alors } P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x\ (\in E)\ \text{t.q. non}(P(x))\right)$

"on échange $\exists$ et $\forall$; les liaisons t.q et $\begin{cases}\text{alors} \\ \text{on a}\end{cases}$; et on nie ce qui est $\boxed{\text{après}}$ la liaison ("t.q" ou $\begin{cases}\text{alors} \\ \text{on a}\end{cases}$)"

pv de (1) comme $P(x) \Leftrightarrow \text{non}(\text{non } P(x))$ le membre de gauche de (1) est équivalent (changer des morceaux équivalents) à $\text{non}\left(\exists x\ (\in E)\ \text{t.q. non}(\text{non } P(x))\right)$ qui est la définition de $\forall x\ (\in E)$ alors $\text{non}(P(x))$ $\square$

Exemple Critère utile (voir Mat123...) pour (si $x \in \mathbb{R}$) $x \leq 0$

Comme $(x > 0) \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0 \text{ tq } x > \alpha)$

[$\Rightarrow$ prendre $\alpha = \frac{x}{2}$
$\Leftarrow$ transitivité de $>$: si $x > \alpha$ et $\alpha > 0$ alors $x > 0$]

et non($>$) est $\leq$ on a $(x \leq 0) \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0 \text{ on a } x \leq \alpha)$

Application $x \in [0,1]$ de développement décimal illimité

$x = 0{,}a_1 a_2 \dots$ (où $a_k \in \{0,1,\dots,9\}$) est nul si tous les ai sont nuls $(a_1 = \dots = a_{m-1} = 0) \Leftrightarrow (x \leq \alpha = 10^{-m})$.

4 Echange des quantificateurs avec "et", "ou" et entre eux.

Soit P et Q deux propositions, on a les équivalences

(3) $\left(\exists x \ P \text{ ou } Q\right) \Leftrightarrow \left((\exists x P) \text{ ou } (\exists x Q)\right)$

(4) $\left(\forall x \ P \text{ et } Q\right) \Leftrightarrow \left((\forall x P) \text{ et } (\forall x Q)\right)$

(5) $\exists x \exists y \ P \Leftrightarrow \exists y \exists x \ P$

(6) $\forall x \forall y \ P \Leftrightarrow \forall y \forall x \ P$

Remarque a) profitant de (5) et (6) on utilise les abréviations

$$\left(\exists x (\in X), y (\in Y) \ P\right) \text{ pour } \left(\exists x (\in X) \exists y (\in Y) \ P\right)$$

$$\left(\forall x (\in X), y (\in Y) \ P\right) \text{ pour } \left(\exists x (\in X) \exists y (\in Y) \ P\right)$$

2 b) Ce sont les seules équivalences générales. Les implications suivantes sont vraies mais leurs réciproques ne le sont pas.

(7) $\exists x \ (P \text{ et } Q) \Rightarrow (\exists x P) \text{ et } (\exists x Q)$

(8) $(\forall x P) \text{ ou } (\forall Q) \Rightarrow \forall x \ (P \text{ ou } Q)$

(9) $\exists x \forall y \ P \Rightarrow \forall y \exists x \ P$

Contre exemple à la réciproque de

(7) $(\exists x \in \mathbb{R}$ t.q $3x+2=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $2x+3=0)$ est vraie

mais $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $((3x+2=0)$ et $(2x+3=0))$ est fausse

(9) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $x+y=0$ est vraie $(x=-y)$

mais $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in \mathbb{R}$ on a $x+y=0$ est faux

Exercice a) donner des exemples pour les autres cas de (3) à (10) (votre imagination et/ou poly)

b) Ecrire les contraposées des équivalences et implications de (3) à (10).

5 Postroduction au chapitre 2

- Pour s'assurer de la véracité d'un énoncé on procède par petites étapes (comme (*), (* *), ~~(***)~~, transitivité de $\Rightarrow$, (1) à (11) dans 2.1, (1) à (9) ds 2.3 ...) de façon à ce que chacune soit tellement élémentaire qu'on ne puisse douter de sa validité, ce sont les tautologies

Difficultés	parade
■ ambiguités du langage courant (m̃ en cours de math)	formaliser (2.2 ...)
Ex a) $\{x\in\mathbb{R}; a\leq x\leq b\} = \{x\in\mathbb{R}; x \text{ entre } a \text{ et } b\}$ est vrai si l'on présuppose $a\leq b$, faux sinon	préciser les hypothèses (le contexte)
b) • "la température de l'homme est 37°C" • "maintenant tu es un homme" ordinairement seulement • "¬(homme) = dame (WC publics)"	PRÉCISER les QUANTIFICATEURS [et à leur place ~~$x^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$~~ $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x^2\geq 0$] et les liaisons être précis dans ce qu'on écrit ! (relire en se demandant comment interpréter)
■ paradoxes "je suis ce que je ne suis pas"	Ne travailler qu'avec des • "énoncés grammaticalement corrects" • ensembles "certifiés conformes" $\{0,1,\dots,9\}$, $\{a,b,c,\dots,z\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ... ou "construits suivant les règles" Fait 1, Fait 2 ...

Ecrire tout en langage formalisé (avec seulement non, ou, $\in$, $\exists$)

serait trop lourd (même avec les ordinateurs actuels)
et cacherait les idées, les points important des démonstration

On utilise donc des abréviations ($A \Rightarrow B$ pour B ou non A ...),
Son "bon sens" une langue correcte et précise.

Cependant quand on a un doute (par exemple pour écrire la négation d'un énoncé compliqué)
on formalise et applique mécaniquement les tautologies
[(1) à (11) dans 2.1 ...]

fin 25/09/2006

2.4 Applications

1 Couples et produits d'ensembles

Soit x et y deux lettres (dans cet ordre) (x est la première, y la seconde)

le couple de première composante x et seconde composante y est (x, y)

deux couples sont égaux ssi ils ont même première et seconde composante

$$\big((x,y) = (s,t)\big) \Leftrightarrow \big((x=s) \text{ et } (y=t)\big)$$

Exemple a) Si $x, y, s, t \in \mathbb{R}$

b) $x = 3$, $y = 1$, $s = 2^2 - 1$, $t = (-1)\times(-1)$

c) $(x,y) = (s,t)$; $(x,y) \neq (t,s)$

Remarque : on a $(x,y) = (y,x)$ uniquement si $x = y$

Fait 3 Soit X et Y deux ensembles (dans cet ordre) il y a un ensemble dont les éléments sont les couples (x,y) pour $x \in X$ et $y \in Y$ (l'ensemble) c'est le produit de X par Y, noté $X \times Y$ ainsi

$$X \times Y = \{(x,y)\ ;\ x \in X,\ y \in Y\}$$

Abréviation si $X = Y$ on note X^2 pour $X \times X$

Exemple $X = \{0, 1\}$ $Y = \{a, b, c\}$

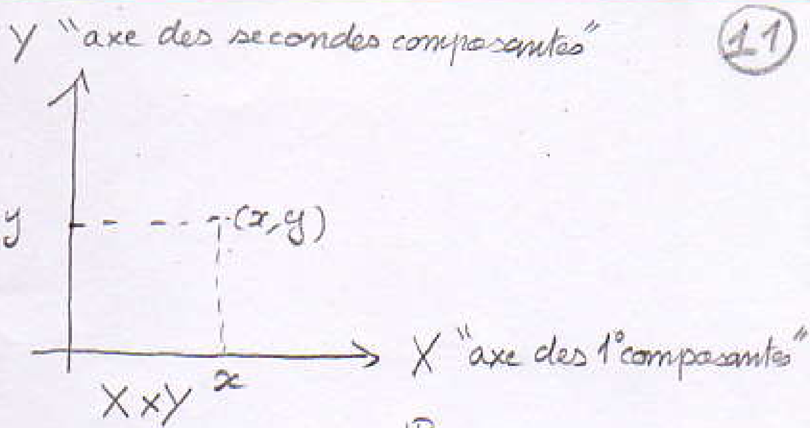
$X \times Y = \{(0,a), (1,a), (0,b), (1,b), (0,c), (1,c)\}$

$\neq$

$Y \times X = \{(a,0), (b,0), (c,0), (a,1), (b,1), (c,1)\}$

visuelle

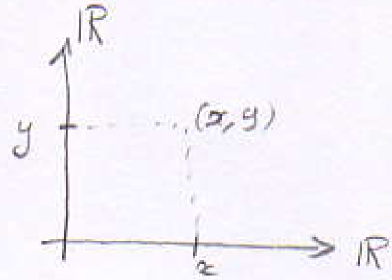
"Representation graphique"



Exemples

$(0,c)$	$(1,c)$			
$(0,b)$	$(1,b)$	$(a,1)$	$(b,1)$	$(c,1)$
$(0,a)$	$(1,a)$	$(a,0)$	$(b,0)$	$(c,0)$

$\{0,1\} \times \{a,b,c\}$ $\qquad$ $\{a,b,c\} \times \{0,1\}$



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

"plan de la géometrie analytique"

Remarques a) au lieu de "un nombre complexe est une expression $x+iy$ où ..."

il aurait été plus correct de dire $\mathbb{C}$ est le produit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni des operations $(x,y)+(s,t)=(x+s,\, y+t)$; $(x,y)\cdot(s,t)=(xs-yt,\, xt+ys)$

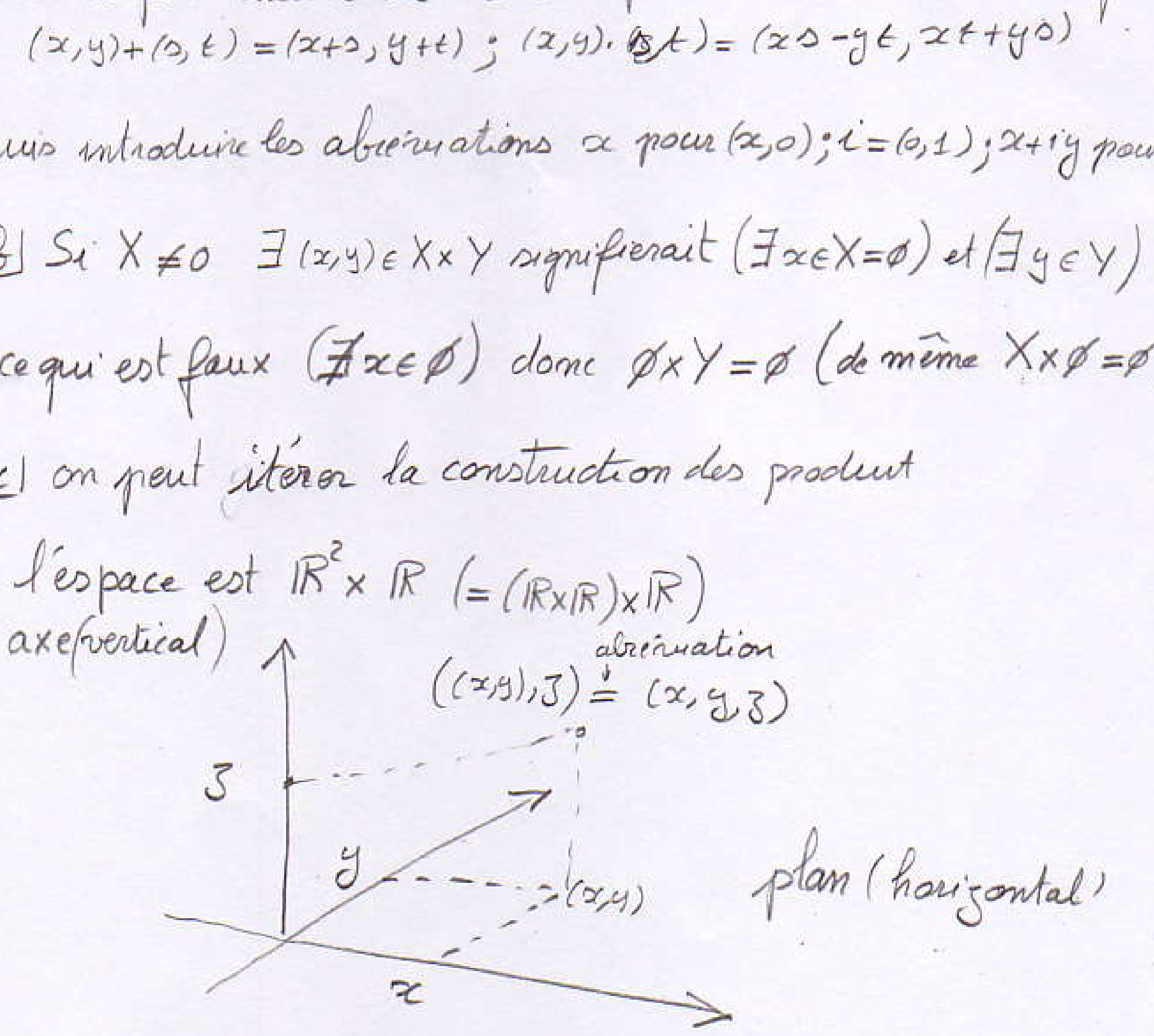
puis introduire les abreviations x pour $(x,0)$; $i=(0,1)$; $x+iy$ pour (x,y).

b) Si $X \neq 0$ $\exists (x,y) \in X \times Y$ signifierait $(\exists x \in X = \emptyset)$ et $(\exists y \in Y)$

ce qui est faux $(\nexists x \in \emptyset)$ donc $\emptyset \times Y = \emptyset$ (de même $X \times \emptyset = \emptyset$)

c) on peut itérer la construction des produit

l'espace est $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ $(= (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R})$



Soit n un entier positif et $X_1, \dots, X_k, \dots, X_n$ des ensembles

	$n=1$	$n=2$	$n \geqslant 2$
élement	x_1	couple (x_1, x_2)	n-uple $(x_1, \dots, x_n)$
ensemble	X_1	produit $X_1 \times X_2$ $= \{(x_1, x_2) ; x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$	produit $\prod_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times \dots \times X_k \times \dots \times X_n$ $= \{(x_1, \dots, x_n) ; 1 \leqslant k \leqslant n \ x_k \in X_k\}$

Complément (formalisation) (essai de)

cavalement les n-uples et produits se définissent par récurrence

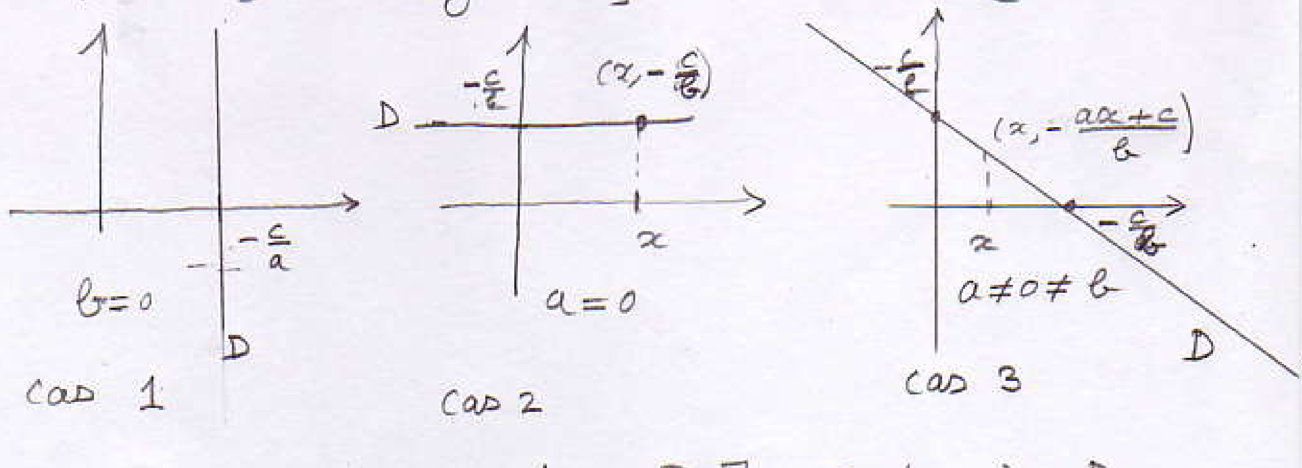
$n = 1 \quad (x_1) = 1 \qquad X_1 = X_1$

$n \geqslant 1 \quad (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) \qquad \prod_{k=1}^{n+1} X_k = \left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) \times X_{n+1}$

2. Graphes et applications

Exemple Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; ax + by + c = 0\}$ est une droite



dans les cas 2 et 3 $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ (x, y) \in D$

et $\forall x \in \mathbb{R} \ ((x, y) \in D)$ et $((x, y') \in D) \Rightarrow y = y'$

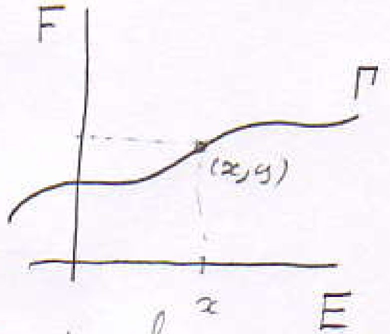
pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tq. $(x, y) \in D$ $\left(y = -\frac{ax+c}{b}\right)$

$\exists !$

Soit E et F deux ensembles. Un graphe de source E et but F est une partie $\Gamma \subset E \times F$ t.q. $\forall x \in E$

(i) $\exists y \in F$ t.q. $(x,y) \in \Gamma$

(ii) si $\big((x,y) \in \Gamma\big)$ et $\big((x,z) \in \Gamma\big)$ alors $y = z$



il détermine l'application de E dans F qui à chaque $x \in E$ associe $f(x)$, l'unique $y \in F$ t.q. $(x,y) \in \Gamma$. on la note

$$f : E \to F, \ x \mapsto f(x)$$

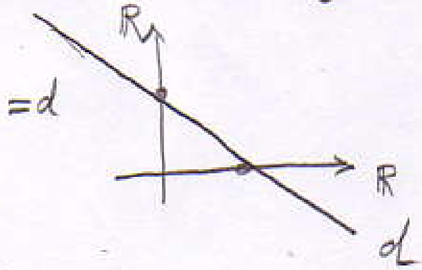
ou (si $f(x)$ est donné par "une formule en x"

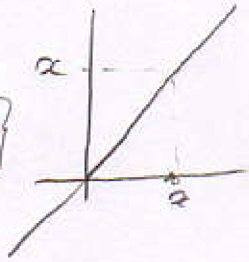
$$f : E \to F, \ f(x) = \text{" la formule"}$$

on dit que $\Gamma = \Gamma_f$ est le graphe de l'application $f : E \to F$ et que E et F sont sa source et son but.

Exemples a) $\{(z, \bar{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ ; \ z \in \mathbb{C}\}$ est le graphe de la conjugaison complexe $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z = x + iy \mapsto \sigma(z) = \bar{z} = x - iy$

b) La droite $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ x + y = 1\} = d$ est le graphe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 1 - x$





c/ la "première bissectrice" $\{(x,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,;\, x \in \mathbb{R}\}$

est le graphe de $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i(x) = x$

c'/ Si X est un ensemble la diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \in X \times X \,;\, x \in X\}$ de X

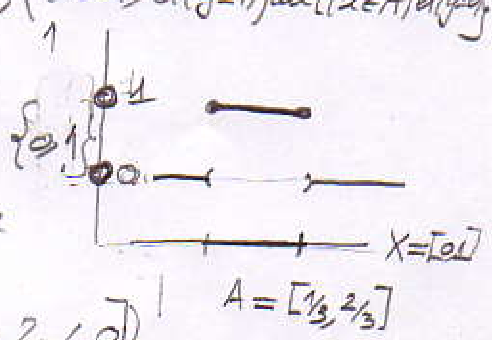
est le graphe de l'application identité de X $Id_X : X \to X$, $Id_X(x) = x$

d/ Soit $A \in \mathcal{P}(X)$ $[A \subset X]$ $\{(x,y) \in X \times \{0,1\} \,;\, ((x \in A) \text{ et } (y=1)) \text{ ou } ((x \in \complement A) \text{ et } (y=0))\}$

est le graphe de la fonction indicatrice de A

$f_A : E \to \{0,1\}$ qui à $x \in X$ associe

1 si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$ [voir Exercice 2.40]



3 Images et images réciproques Soit $f : E \to F$ une application

l'image de l'élément $x \in E$ est l'élément $f(x) \in F$

si $y \in F$, $x \in E$ tq $f(x) = y$ on dit l'élément $x \in E$ est un antécédent de l'élément $y \in F$

Soit $A \subset E$ une partie de la source de $f : E \to F$

l'image de la partie A est $f(A) = \{y \in F \,;\, \exists a \in A,\ y = f(a)\}$

$$= \{f(a) \in F \,;\, a \in A\}$$

la partie de F formée des images des éléments de A

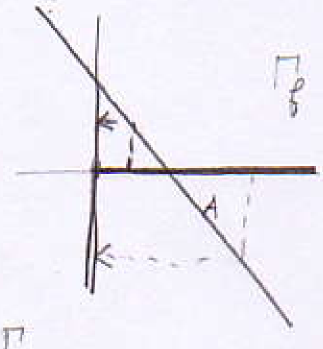
On a ainsi défini une application $f = \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F), A \mapsto f(A)$

Soit $B \subset B'$ une partie du but de $f : E \to F$

l'image réciproque de B est $f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$

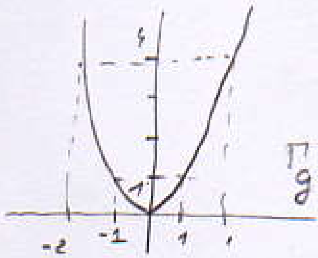
la partie de E formée des antécédents des éléments de B

on a ainsi défini une application $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E), B \mapsto f^{-1}(B)$



Exemples a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$

$$f([0, +\infty[) =]-\infty, 0]$$



b) Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

$g([0, +\infty[) = [0, +\infty[= g([-1, +\infty[)$

$g^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$; $g^{-1}(]-\infty, 0[) = \emptyset$

c) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z - \bar{z}$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $g(z) = z + \bar{z}$

$f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$; $g^{-1}(\{0\}) = i\mathbb{R}$

d) Si $A \subset X$ et $f_A : X \to \{0, 1\}$ est la fonction indicatrice de A

$$f_A^{-1}(\{1\}) = A \quad \text{et} \quad f_A^{-1}(\{0\}) = \overset{c}{A}$$

Remarque si $f : E \to F$ et $b \in F$ on note $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$ (pour l'instant)

c'est une $\boxed{\text{partie}}$ de la source E et pas l'image de $b \in F$ par une hypothétique "application $f^{-1} : F \to E$".

<u>Prop</u> Soit une application $f: E \to F$ et $A, A' \subset E$, $B, B' \subset F$ alors

(1) $(A \subset A') \Rightarrow (f(A) \subset f(A'))$ (2) $(B \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$

(3) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ (4) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

$$(5) \quad f^{-1}({}^{c}B) = {}^{c}\left(f^{-1}(B)\right)$$

(6) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ (7) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

(8) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (9) $A \subset f^{-1}(f(A))$

2 En général il n'y a pas égalité dans (7) (8) (9)
et les implications réciproques à (1) et (2) sont fausses

Exercice donner des contre-escemple

<u>Remarques</u> • f^{-1} respecte toutes les opérations $\cup$, $\cap$ et ^{c}

• f et f^{-1} conservent l'ordre des inclusions