18/09/2006

2.1 Propositions (formation d'énoncés)

but : fabriquer des énoncés vrais (et les démontrer)
propositions

on ne considère que des énoncés « grammaticalement correct »

incorrect	correct
j'ai allé	je suis allé
division par 0 $\dfrac{7\times[5^2-(3^2+4^2)]}{5^2-(3^2+4^2)}=7$	$\dfrac{1+2^6}{1+2^2}=2^4-2^2+1$
la borne inférieure n'est pas ≤ la borne sup $\displaystyle\sum_{k=7}^{3} k = 25$	$\displaystyle\sum_{k=3}^{7} k = 25$

"Le groupe info-miage qui a TD de Mat 112 le mardi à 8h"
est incorrect parce que ambigu (les deux groupes ont TD .... à 8h)
mais "un groupe .... à 8h" est correct

de même "si x est réel positif $\sqrt{x}$ est le réel positif t t.q. $t^2=x$"
est correct mais "si z est complexe $\sqrt{z}$ est le complexe u t.q. $u^2=z$"
ne l'est pas.

1. Opérations logiques élémentaires sur les énoncés (corrects)

(0) Chaque énoncé E a sa négation non(E)

[notée aussi non E ; $\neg E$; $\neg(E)$]

Exemple

E	non(E)
j'écris	je n'écris pas
$n = 3$	$n \neq 3$

⚠ "je parle ; j'explique avec les deux mains"
sont des énoncés corrects mais ils n'expriment pas
$\neg$(j'écris)

Si A et B sont des propositions on peut former

(1) la disjonction de A et de B A ou B [notée aussi $A \vee B$]

Exemple a] (je parle) $\vee$ (j'écris)

b] $(n \geqslant 2)$ ou $(n < 3)$

⚠ ds a] il se peut que je parle en écrivant

b] si n est entier $n = 2$ est permis

Le ou (logique) n'est pas exclusif
ce n'est pas certains "ou" du langage courant : "vous travaillez ou vous sortez !"

(2) La conjonction de A et de B   A et B [notée aussi $A \wedge B$]

2 Tables de vérité

un énoncé peut être vrai (abréviation V) ou faux (F)

Principes de base Soit E, E' deux énoncés alors

$$E \text{ est faux} \overset{\text{Def}}{=} \text{non}(E) \text{ est vrai}$$

(*) E ou (non (E)) est vrai (tiers exclu)

(**) si E est vrai alors (E ou E') est vrai

A	B	non A	A ou B	A et B
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

complément plutôt que d'examiner tous les cas il est plus commode de calculer la fonction de vérité v_A qui vaut

$$v_A = 1 \quad \text{si } A \text{ est vrai}$$
$$v_A = 0 \quad \text{si } A \text{ est faux}$$

Exercice vérifier les formule $v_{\text{non } A} = v_{\neg A} = 1 - v_A$

$$v_{A \text{ et } B} = v_{A \wedge B} = v_A \times v_B \quad \text{(produit des valeurs)}$$

$$v_{A \text{ ou } B} = v_{A \vee B} = v_A + v_B - v_A \times v_B$$

$$v_{A \vee B} + v_{A \wedge B} = v_A + v_B$$

3. implications et équivalences

Si A et B sont deux propositions

l'implication A implique B, notée $A \Rightarrow B$, est B ou (non A)

synonymes: si A alors B ; A est suffisant pour B.

donc $A \Rightarrow B$ est vrai si soit B est vraie,
soit A est fausse

en particulier si A est vraie alors B est vraie.

Rmq sert à montrer que B est vrai

Exemple si n est un entier $(n>0) \Rightarrow (n \geq 1)$ est vraie

application soit $\frac{r}{s}, \frac{p}{q}$ des rationnels avec $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ alors

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - qr}{qs} \geq \frac{1}{qs} \quad \left(\text{alors que l'on savait seulement } \frac{p}{q} - \frac{r}{s} > 0\right)$$

L'implication réciproque A est impliqué par B, notée $A \Leftarrow B$, est (non B) ou A

synonymes: B seulement si A ; A est nécessaire pour B.

Exemple si x est un réel et $\alpha > 0$ $(x>0) \Leftarrow (x>\alpha)$ est vraie

L'équivalence A équivalent à B, noté $A \Leftrightarrow B$, est $(A \Rightarrow B)$ et $(A \Leftarrow B)$

syn. A et B sont équivalents ; B si et seulement si A ; B ssi A

alors les propositions A et B ont même table de vérité

Exemple si n désigne un entier

$(n > 0) \Leftrightarrow (n \geqslant 1)$ est vraie, mais

$(n > 0) \Leftrightarrow (n \geqslant 2)$ ne l'est pas

[on a bien $(n>0) \Leftarrow (n \geqslant 2)$ mais pas $(n>0) \Rightarrow (n \geqslant 2)$]

$$(***)\left\{\begin{array}{l}\text{Si } X, Y, Z \text{ sont trois propositions et } X \Rightarrow Y \text{ vrai alors} \\ \\ \qquad X \text{ ou } Z \Rightarrow Y \text{ ou } Z \quad \text{vrai}\end{array}\right.$$

Conséquence (transitivité de $\Rightarrow$ ou syllogisme)

Si A, B, C sont trois propositions t.q. $(A \Rightarrow B)$, $(B \Rightarrow C)$ sont vraies alors $A \Rightarrow C$ est vraie

pv : $(***)$ avec $X = B$, $Y = C$ et $Z = \text{non} A$ donne (car $B \Rightarrow C$ vrai)

B ou non A $\Rightarrow$ C ou non A vrai, c.a.d. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ vrai

comme $A \Rightarrow B$ vraie on a $A \Rightarrow C$ vrai. $\square$

Exercice calculer $v_{X \Rightarrow Y}$ en fonction de v_X et v_Y,

en déduire une "pv par calcul" de la conséquence

Thm Soit A, B, C trois propositions alors les équivalences suivantes sont vraies :

(1) A ou B $\Leftrightarrow$ B ou A
(2) A et B $\Leftrightarrow$ B et A
} commutativité de "ou" et "et"

(3) A ou (B ou C) $\Leftrightarrow$ (A ou B) ou C
(4) A et (B et C) $\Leftrightarrow$ (A et B) et C
} associativité " " " "

(5) A et (B ou C) $\Leftrightarrow$ (A et B) ou (A et C) distributivité de "et" sur "ou"
(6) A ou (B et C) $\Leftrightarrow$ (A ou B) et (A ou C) ——— "ou" – "et"

(7) non (non A) $\Leftrightarrow$ A double négation

(8) non (A ou B) $\Leftrightarrow$ (non A) et (non B)
(9) non (A et B) $\Leftrightarrow$ (non A) ou (non B)
} négations de "ou" et "et"

Rmq (1) donne $\underset{\{(\text{non } B) \text{ ou } A\}}{(A \Leftarrow B)} \Leftrightarrow \underset{\{A \text{ ou non } B\}}{(B \Rightarrow A)}$ (1')

vérification du thm par table de vérité (voir poly pour (5)) ou calcul

(7) $v_{\neg(\neg A)} = 1 - v_{\neg A} = 1 - (1 - v_A) = 1 - 1 + v_A = v_A$ $\square$

pv de $\Leftarrow$ dans (7) (*) avec E = non A donne

non A ou non (non A) vraie

c.a.d non (non A) $\Leftarrow$ A vraie

Exercice* pv de $\Rightarrow$ dans (7)

} pas fait en cours

<u>Corollaire</u> Soit A et B deux propositions alors sont vrais

$$(10) \quad \text{non}\,(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \text{ et non} B$$

$$(11) \quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non} A) \Leftarrow (\text{non} B)$$

un cas où A et non B est vrai est un contre-exemple à $A \Rightarrow B$

Exemple si $n = 1$ alors $n > 0$ et non $(n \geqslant 2)$ est vrai,

contre exemple à $(n>0) \Rightarrow (n \geqslant 2)$ donc $(n>0) \Rightarrow (n \geqslant 2)$ faux

non A $\Leftarrow$ non B (ou non B $\Rightarrow$ non A)

est la <u>contraposée</u> de l'implication $A \Rightarrow B$

Souvent il est plus facile d'écrire la démonstration de la contraposée d'une implication que celle de l'implication

<u>Exemple</u> soit n un entier naturel $(n^2 > 0) \Rightarrow (n > 0)$ n'est pas si simple à justifier que $(n=0) \Rightarrow (n^2=0)$ $\left(\Leftrightarrow (n^2=0) \Leftarrow (n=0)\right)$

<u>Rmq</u> de (11) on déduit $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non} A \Leftrightarrow \text{non} B)$
plus généralement si X est "une partie" d'une proposition $P(X)$ [et X peut "prendre les valeurs $X=A$, $X=B$"] et $A \Leftrightarrow B$ alors $P(A) \Leftrightarrow P(B)$

Exemple soit A, B, C trois propositions avec $A \Leftrightarrow B$ alors

A ou C $\Leftrightarrow$ B ou C ; A et C $\Leftrightarrow$ B et C ; non (non A ou C) $\Leftrightarrow$ non (non B ou C)

Exercice pr du cas (puis vérifier sur le poly)

2.2 Ensembles

Exemples
- $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$ ——— relatifs
- $\mathbb{Q}$ ——— nombres rationnels
- $\mathbb{R}$ ——— réels
- $\mathbb{C}$ ——— complexes

notation "marque déposée" $\mathbb{N} = \mathbf{N}, \ldots$

$\mathcal{C}_a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ——— chiffres (arabes)

$\mathcal{A}_\ell = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ ——— lettres de l'alphabet (latin)

"notations personnelles" $\mathcal{E}t$ ensemble des étudiants de Mat112

1 $\in$, $\subset$ et $=$

La proposition x {est élément de / appartient à} l'ensemble E se note $x \in E$

sa négation (son contraire) x {n'est pas élément de / n'appartient pas à} ——— $x \notin E$

En général si un symbole rayé désigne non(la proposition du symbole) [$\neq$ est non($=$)]

Exemple $2 \in \mathbb{N}$; $-7 \notin \mathbb{N}$; $0{,}33\ldots \left(=\frac{1}{3}\right) \in \mathbb{Q}$; $0{,}1010010001\ldots \in \mathbb{R}$ $(\notin \mathbb{Q})$

$i \in \mathbb{C}$; $i \notin \mathbb{R}$; Bernard Ycart $\notin \mathcal{E}t$

un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$

si tout élément de E est élément de F

Exs $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Propriétés de $\subset$ (1) pour tout ensemble E on a $E \subset E$

(2) Si E et F sont des ensembles on a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$

(3) Si E, F, G sont trois ensembles avec $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a $E \subset G$ $\boxed{E}$

paraphrase de (2):

deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont mêmes éléments [(tout élément de E est élément de F) et (tout élément de F est élément de E)]

On peut donc définir un ensemble par la liste de ses éléments

Ex $\mathcal{C}\ell = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ensemble des chiffres impairs

$\{2n ; n = 0, 1, 2, \dots\}$ ou $\{2n ; n \in \mathbb{N}\}$ ensemble des entiers naturels pairs

Un ensemble E contient un ensemble F, noté $E \supset F$ si $F \subset E$

2 Parties et construction d'ensembles

Une partie d'un ensemble E est un ensemble A t.q. $A \subset E$

Fait 1 Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition sur les éléments $x \in E$

alors (1) les éléments $x \in E$ tels que $P(x)$ est vrai forment une partie de E

notée $\{x \in E ; P(x) \text{ est vraie}\}$, $\{x \in E ; P(x)\}$, $\{x \in E \mid P(x)\}$

[et dans le poly $\{x \in E \text{ t.q. } P(x)\}$]

(2) Si $Q(x)$ est une autre propriété sur les éléments $x \in E$ et $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

alors $\{x \in E ; P(x)\} = \{x \in E ; Q(x)\}$

fin du 18/09/2006 "des propriétés équivalentes définissent le même ensemble"

Exemples a) Si $P(x)$ est "x est différent de chaque élément $x \in E$"

l'ensemble $\{x \in E ; P(x)\}$ n'a aucun élément, c'est l'ensemble vide $\emptyset$.

b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$ est

l'intervalle fermé $[a, b]$ d'origine a et d'extrémité b.

C'est aussi $\{x \in \mathbb{R} ; x \text{ est entre } a \text{ et } b\}$ car, sachant $a \leq b$,

$(a \leq x \leq b) \Leftrightarrow (x \text{ entre } a \text{ et } b)$

Par contre, si $a \not\leq b$ (c.a.d $a > b$), l'équivalence n'est plus vrai

et $\{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\} = \emptyset$ alors que $\{x \in \mathbb{R} ; x \text{ est entre } a \text{ et } b\} = [b, a]$

<u>Rappel</u> Si a et b sont des entiers a *divise* b, noté $a \mid b$, si il y a un entier c tel que $b = a \times c$, ainsi $(a \mid b) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (b = a \times c \text{ où } c \in \mathbb{Z})$

Exemple $2 \mid 6$ (car $6 = 2 \times 3$) mais $2 \nmid 7$ car le reste de la divⁿ de 7 par 2 est $1 \neq 0$

Cl $\{n \in \mathbb{Z} ; 2 \mid n\} = \{n \in \mathbb{Z} ; n = 2m \text{ où } m \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des *entiers pairs* $\{2m ; m \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

Fait 2 Si E est un ensemble il y a un ensemble dont les éléments sont les parties de E, c'est l'*ensemble des parties de E* noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$; $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $(\neq \emptyset)$

<u>Rmq</u> pour tout ensemble E on a

$\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ (partie vide)

$E \in \mathcal{P}(E)$ (partie pleine)

fin des compléments en TD