11/09/2006

1.3 Nombres complexes

un (nombre) complexe est une expression $z = a + ib$

où a et b sont des (nombres) réels

L'opposé de $z = a+ib$ est $-z = (-a) + i(-b)$

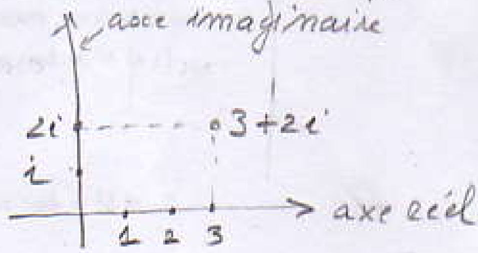
la partie réelle ——— $Re(z) = a$

la partie imaginaire ——— $Im(z) = b$

abréviations usuelles : $a + i0 = a$; $0 + ib = ib$; $i = i1$

Représentation géométrique le nb complexe $z = a+ib$ est l'affixe

du point de coordonnées (a,b) dans le plan



opérations sur les complexes

si $z = a+ib$ et $u = c+id$ sont deux complexes leur

somme est $z + u = (a+c) + i(b+d)$

produit est $z \cdot u = ac - bd + i(ad+bc)$

Rmqs a) si $z = a$ et $u = c$ sont réels ce sont les opérations des réels

b) $(ib)^2 = (0+ib)\cdot(0+ib) = 0 - b^2 + i(0 \times b + b \times 0) = -b^2$

(en particulier $i^2 = -1$)

<u>Rappel</u> (trinôme du second degré réel) Soient a, b, c des réels avec $a \neq 0$

Alors pour nombre X on a

$$T(X) = aX^2 + bX + c = a\left[X^2 + 2\,\frac{b}{2a}X + \frac{c}{a}\right] = a\left[X^2 + 2\,\frac{b}{2a}X + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - 4ac\right)\right]$$

si $b^2 - 4ac = 0$ $\qquad T(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2$

$b^2 - 4ac > 0$ $\qquad T(X) = a\left(X - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(X - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$

$b^2 - 4ac < 0$ $\qquad T(X) = a\left(X - \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)\left(X - \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)$

Lemme 1 Pour tout complexe $z = a + ib$ il y a un complexe $u = x + iy$ tel que $u^2 = z$.

De plus si v est un complexe avec $v^2 = z$ alors soit $v = u$, soit $v = -u$.

pv: $u^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ il faut resoudre $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Le cas $b = 0$ est laissé en exercice

Cas $b \neq 0$ donc $x \neq 0$ et $y = \frac{b}{2x}$ et $x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$

soit $0 = 4(x^2)^2 - 4a\,x^2 - b^2 = 4\left(x^2 - \frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)$

comme $\frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0$ et $x^2 \geq 0$ on a

soit $x = x_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ et $y = y_1 = \frac{b}{2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}} = \frac{b}{\sqrt{2}\,\sqrt{a + \sqrt{a^2+b^2}}}$

soit $x = x_2 = -x_1$ et $y = y_2 = -x_1$ $\square$

<u>Exercice</u> Verifier directement $\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{2}\,\sqrt{a + \sqrt{a^2+b^2}}}\right)^2 = a + ib$

Corollaire Soit a, b, c des complexes avec $a \neq 0$

Alors il y a des complexes x_1 et x_2 tels que pour tout complexe X

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$$

De plus $\quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$$\text{pour } k = 1, 2 \quad \left(x_k - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

plus généralement on a le

Thm 1 (de d'Alembert, admis) Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ complexes avec $a_n \neq 0$

Alors il y a n complexes $x_1, \dots, x_n$ tels que pour tout complexe X

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{h=1}^{n} (X - x_h)$$

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0 = a_n (X - x_1) \cdots (X - x_h) \cdots (X - x_n)$$

De plus $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \prod_{h=1}^{n} (x_i) = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Proposition Soit $z = a + ib$, $u = c + id$, $v = e + if$ trois complexes alors

(1) $(z+u)+v = z+(u+v)$; $(z.u).v = z.(u.v)$ (associativité de + et .)

(2) $z+u = u+z$; $z.u = u.z$ (commutativité de + et .)

(3) $z.(u+v) = z.u + z.v$ (distributivité de . sur +)

(4) $z+0 = z$; $z.1 = z$

(5) $z + (-z) = 0$; on verra plus bas que si $z \neq 0$ il y a z^{-1} t.q $z.z^{-1} = 1$

pv de (1) pour. $((a+ib)(c+id))(e+if) = (ac-bd+i(ad+bc)).(e+if)$

$= (ac-bd)e-(ad+bc)f + i[(ac-bd)f+(ad+bc)e]$

$= ace - bde - adf - bcf + i[acf - bdf + ade + bce]$

$(a+ib)[(c+id)(e+if)) = (a+ib)(ce-df + i(cf+de))$

$= a(ce-df) - b(cf+de) + i[a(cf+de) + b(ce-df)]$

$= ace - adf - bcf - bde + i[acf + ade + bce - bdf]$ $\square$

Rmq Les formules pour. suivent de la prop. et de $i^2 = -1$

Le conjugué du complexe $z = a+ib$ est $\overline{z} = a-ib$

Rmq a) $2\,\mathrm{Re}(z) = z + \overline{z}$; $2i\,\mathrm{Im}(z) = z - \overline{z}$

$$z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) + \frac{1}{2}(z-\overline{z})$$

b) z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$

— — imaginaire pur — — $\overline{z} = -z$

c) $\overline{\overline{z}} = z$

Lemme 2 Soit $z = a+ib$ et $u = c+id$ des complexes alors

(1) $\overline{z+u} = \overline{z} + \overline{u}$ (2) $\overline{zu} = \overline{z}\,\overline{u}$

pv de (2) $\overline{z.u} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = ac-bd-i(ad+bc)$

$\overline{z}.\overline{u} = (a-ib)(c-id) = ac-(-b)(-d) + i(a(-d)+(-b)c) = ac-bd-i(ad+bc)$ $\square$

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = aa - b(-b) + i(a(-b)+ba) = a^2+b^2$ est réel avec

$0 \leq a^2, b^2 \leq z\bar{z}$ et $z\bar{z} = 0$ si et seulements si $z=0$

Le <u>module</u> de z est $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ on a $0 \leq |\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

c'est (Thm de Pythagore) la distance entre les points d'affixe z et 0

et $|z| = 0$ si et seulement si $z=0$

<u>Rmq</u> $|z|$ est la distance entre les points d'affixe z et 0

<u>Corollaire</u> Soit $z = a+ib$ et $u = c+id$ des complexes alors (0) $|\bar{u}| = |u|$

(1) si $z \neq 0$ et $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ $\left(= \bar{z} \cdot \frac{1}{z\bar{z}}\right)$ on a $z \cdot z^{-1} = 1$

(2) $|zu| = |z||u|$

(3) $|z+u| \leq |z| + |u|$ (inégalité triangulaire)

plus précisément $|z+u|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{u}) + |u|^2 \leq (|z|+|u|)^2$

pv (1) $z\left(\bar{z} \cdot \frac{1}{z\bar{z}}\right) = z\bar{z} \cdot \frac{1}{z\bar{z}} = 1$ (calcul dans les réels)

(2) $|zu|^2 = zu \cdot \overline{zu} = zu\bar{u}\bar{z} = z\bar{z}u\bar{u} = |z|^2|u|^2$

(3) $|z+u|^2 = (z+u)(\bar{z}+\bar{u}) = z\bar{z} + z\bar{u} + u\bar{z} + u\bar{u}$

$= |z|^2 + z\bar{u} + \bar{z}\bar{\bar{u}} + |u|^2 = |z|^2 + z\bar{u} + \overline{z\bar{u}} + |u|^2$

$= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{u}) + |u|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{u}| + |u|^2 = |z|^2 + 2|z||u| + |u|^2 = (|z|+|u|)^2$ ∎

Exemple $\frac{1+i}{1+2i} = (1+i) \times \frac{1}{1+2i} = (1+i)\frac{(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-i}{1+4} = \frac{3}{5} - i\frac{1}{5}$

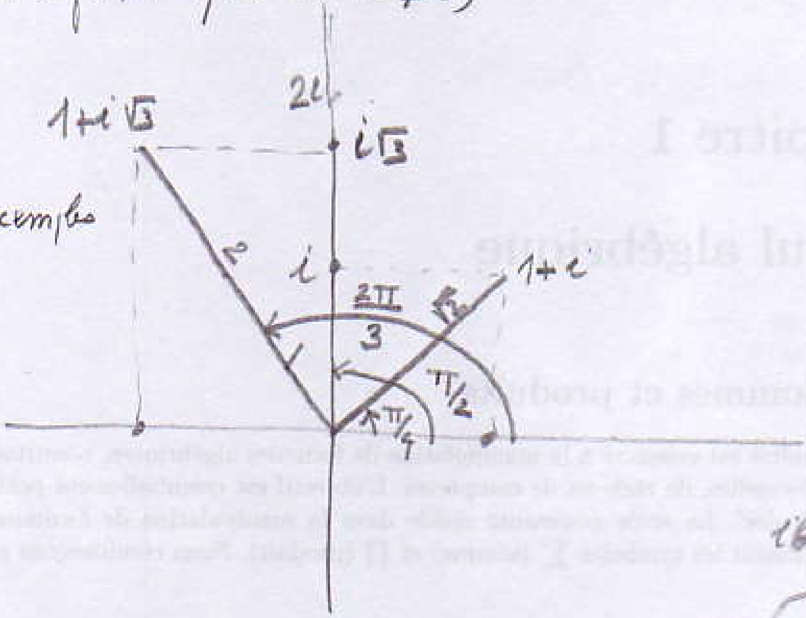
L'*argument* de z est l'angle θ avec $0 \leq \theta < 2\pi$ t.q

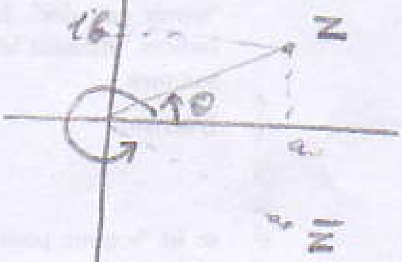
$$Re(z) = |z| \cos\theta \quad \text{et} \quad Im(z) = |z| \sin\theta$$

(il n'est bien défini que si $z \neq 0$)

Exemples

voir d'autres exemples dans le poly





Si θ est l'argument de $z = a + ib$

alors $2\pi - \theta$ est l'argument de $\bar{z} = a - ib$

fin de 11/09/2006

1.4 Formes trigonométrique et exponentielle

Soit $z = a + ib$ un complexe si $\rho = |z|$ est son module et θ son argument

$$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

est la *forme trigonométrique* (ou *polaire*) de z

L'*exponentielle* (complexe) de z est e^z ou $\exp(z)$ $\Big\} = e^a(\cos b + i \sin b)$

Rmq Si $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ alors $z=e^{(\ln|z|+i\theta)}$ forme exponentielle

et $z=\rho e^{i\theta}$ forme (semi-) exponentielle

<u>Thm</u> Soit $z=a+ib$ et $u=c+id$ deux complexes alors

$$e^{z+u}=e^{z}.e^{u}$$

pv $e^{z}.e^{u}=e^{a}(\cos b+i\sin b)e^{c}(\cos d+i\sin d)$

$$=e^{a}e^{c}\left(\cos(b)\cos(d)-\sin(b)\sin(d)+i\left(\cos(b)\sin d+\sin(b)\cos(d)\right)\right)$$

$$=e^{a+c}\left(\cos(b+d)+i\sin(b+d)\right)=e^{a+c+i(b+d)}=e^{z+u} \quad \square$$

Rmq mnémotechnique il est plus facile de recalculer

$$(\cos b+i\sin b)(\cos d+i\sin d)=\dots$$

que de mémoriser les formules d'addition

$$\begin{cases}\cos(b+d)=\cos(b)\cos(d)-\sin(b)\sin(d)\\ \sin(b+d)=\cos(b)\sin(d)+\sin(b)\cos(d)\end{cases}$$

Rmq Soit $z=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho\geq 0$

a) $\bar{z}=\rho e^{-i\theta}$

b) $|z|^2=z\bar{z}=\rho e^{i\theta}\rho e^{-i\theta}=\rho^2 e^{i(\theta-\theta)}=\rho^2$ donc $|z|=\rho$, $|e^{i\theta}|=1$

c) Si n est entier (et $\rho>0$ si $n<0$) alors $z^n=\rho^n e^{in\theta}$

Fait Sait z et u deux complexes alars

$$e^{z} = e^{u} \text{ si et seulement si il y a un entier } k \text{ t.q } u = z + i2k\pi$$

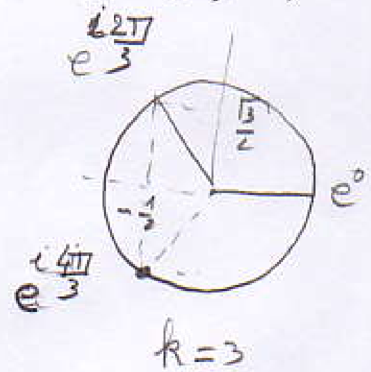
corollaire Sait n un entier positif et $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$

alars les solutions de l'équation $X^n = z$ sont

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \text{ aù } x_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unite $e^{\frac{i2\pi k}{n}}$ aù $k = 0, 1, \dots, n-1$

sont donc les solutions de $X^n = 1$



de $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

on tire les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application "linéarisation de polynômes trigonométiques"

Exemple $\sin^2\theta\cos\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)$

$$= \frac{\left((e^{i\theta})^2 - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2\right)}{-4}\;\frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{2}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}\right)\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\Big(e^{3i\theta} - 2e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$
$$+ e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\Big)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} - \frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\theta - \cos 3\theta\right)$$

cette "linéarisation" de $\sin^2\theta\cos\theta$ peut servir pour calculer

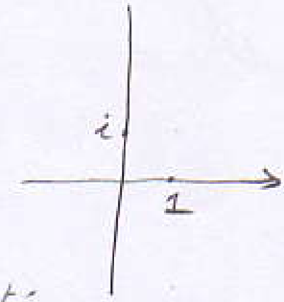
$$\int_0^x \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = \int_0^x \frac{1}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\left(\sin x - \frac{\sin(3x)}{3}\right)$$

Rmq ici on pouvait calculer directement $\int_0^x \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = \dfrac{\sin^3(x)}{3}$

[plus pénible dans l'exemple $\sin^4\theta\cos^2\theta$ du poly]

Exercice Vérifier la cohérence : linéariser $\dfrac{\sin^3 x}{3}$ $\left[= \frac{1}{12}(3\sin x - \sin 3x)\right]$

1.5 Géométrie du plan complexe



repère orthonormé : axes réels et imaginaire munis des vecteurs unités 1 et i

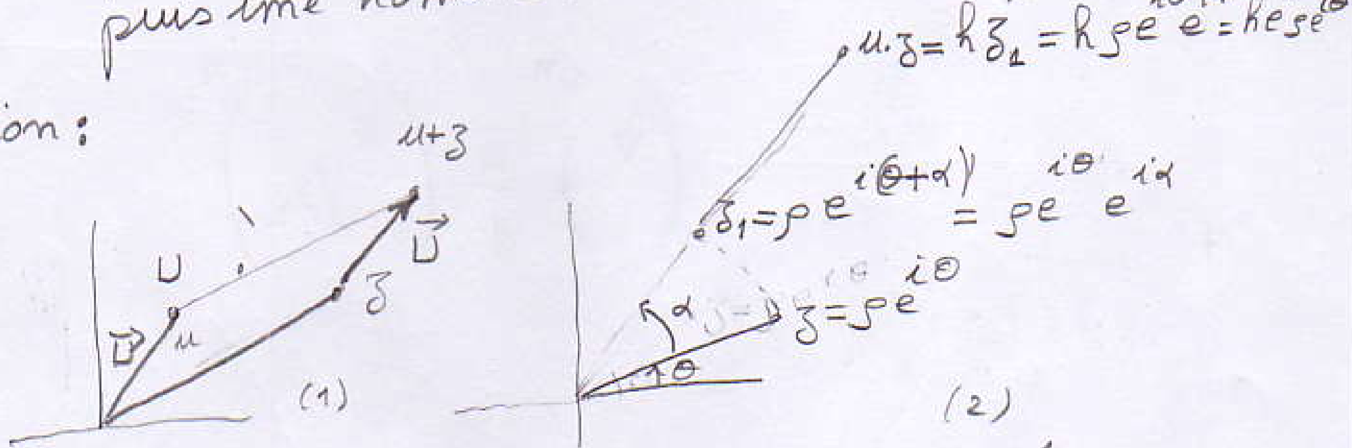
Le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (x, y) est représenté par le nombre complexe $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$

Observation si $u = s + it = h e^{i\alpha}$ est un nombre complexe, U le point d'affixe u et M le point d'affixe $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ alors

(1) Le point d'affixe $u + z$ est le translaté de M par la translation de vecteur $\vec{U} = \vec{OU}$

(2) Le point d'affixe uz est obtenu à partir de M en faisant une rotation de centre O et angle α, puis une homothétie de centre O et rapport h.

explication :



Rappel Si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs du plan de coordonnées dans un repère orthonormé (x, y) et (s, t)

leur produit scalaire est $\vec{V} . \vec{W} = xs + yt$

La norme de $\vec{V}$ est $\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} . \vec{V}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

t si A et B sont deux point leur distance est $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

Si $\Theta = (\vec{V}, \vec{W})$ est l'angle (orienté) de $\vec{V}$ à $\vec{W}$ on a

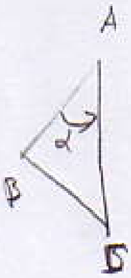
$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \|\vec{V}\| \, \|\vec{W}\| \cos\Theta$$

<u>Lemme 1</u> Si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont representés par $z = x + iy$ et $u = s + it$ on a

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = \mathrm{Re}(\bar{z} u) = \frac{\bar{z}u + z\bar{u}}{2}$$

pv $\mathrm{Re}(x - iy)(s + it) = xs - (-y)t = xs + yt = \vec{V} \cdot \vec{W}$ ∎

<u>Corollaire</u> Soit A, B, C sont trois points d'affixe z_A, z_B, z_C alors



(1) la distance de A à B est $d(A,B) = |z_B - z_A|$

(2) Si A est distinct de B et de C et $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'angle orienté en A du triangle ABC on a

(i) $2\cos\alpha \, |z_B - z_A| \, |z_C - z_A| = 2\,\mathrm{Re}\left((\bar{z}_B - \bar{z}_A)(z_C - z_A)\right)$

$$= (\bar{z}_B - \bar{z}_A)(z_C - z_A) + (z_B - z_A)(\bar{z}_C - \bar{z}_A)$$

(ii) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} e^{i\alpha}$ ou sans division

$$(\bar{z}_B - \bar{z}_A)(z_C - z_A) = |z_B - z_A| \, |z_C - z_A| \, e^{i\alpha}$$

Rappel (des séances suivantes) si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont représentés par $z = x + iy$ et $u = s + it$ le déterminant de $\vec{V}$ et $\vec{W}$ est

$$\det(\vec{V}, \vec{W}) \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} x & s \\ y & t \end{vmatrix} = xt - ys$$

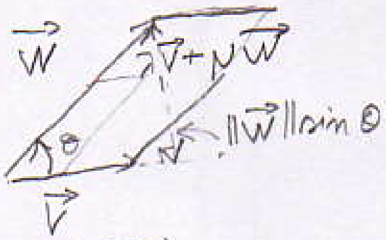
synonyme

$$= \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{W}\| \sin\theta$$

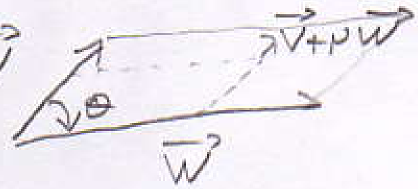
où $\theta = (\vec{V}, \vec{W})$ est l'angle orienté de $\vec{V}$ à $\vec{W}$

cela représente l'aire algébrique du parallélogramme

$$P = \{\lambda\vec{V} + \mu\vec{W} \,;\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ 0 \leq \mu \leq 1\}$$



$\det(\vec{V}, \vec{W}) > 0$ si $0 < \theta < \pi$



$\det(\vec{V}, \vec{W}) < 0$ si $-\pi < \theta < 0$

__Lemme 2__ Si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont représentés par $z = x + iy$ et $u = s + it$

$$\det(\vec{V}, \vec{w}) = \operatorname{Im}(\bar{z}\, u)$$

pv: $\operatorname{Im}(x - iy)(s + it) = xt - ys$

$\square$