symboles / signes $\sum$ et $\prod$ et combinatoire

Somme $\sum$

exemple $\sum_{k=1}^{4} 2^k$ "somme pour k allant de 1 à 4 de 2^k"

$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

en général ds $\sum_{k=m}^{n} a_k$ l'indice de sommation (ici k) prend toutes les valeurs entières comprises entre les deux bornes

la première borne (au dessous du signe $\sum$) est ici m (ds l'ex 1)

la seconde borne (au dessus du signe $\sum$) est ici n (ds l'ex 4)

et on a $m \leq n$

Remarques a) le cas 1° borne = 2° borne est permis $\sum_{k=7}^{7} 2^k = 2^7$ $(= 128)$

b) $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \underbrace{a_{m+1} + \dots + a_{m+n-m}}_{n-m \text{ termes}}$ a $n-m+1$ termes.

L'indice de sommation est une variable muette (c.a.d. peut être remplacé par toute autre lettre non encore utilisée)

Exemples a) $\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = \sum_{h=1}^{3} 2^h$

chgt d'indice b) $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{0+1} + 2^{1+1} + \dots + 2^{n-1+1} = \sum_{h=0}^{n} 2^{h+1}$

regroupement et séparation c) $\sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{m} 2^{n+h} = (2^1 + \dots + 2^n) + (2^{n+1} + \dots + 2^{n+m}) = \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{h=n+1}^{n+m} 2^h = \sum_{h=1}^{n+m} 2^k$

$$= 2^1 + \dots + 2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{n+m}$$

convention $2^0 = 1$ (plus généralement pour tout nombre a $a^0=1$)
(même $a=0$)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

pv: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1\times\sum_{k=0}^{n} 2^k = (2-1)\times\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2\times\sum_{k=0}^{n} 2^k - 1\times\sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2\times 2^k - \sum_{k=0}^{n} 2^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^{1+k} - \sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{k=1}^{n+1} 2^k - \sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} 2^k - \left(\sum_{k=0}^{0} 2^k + \sum_{k=1}^{n} 2^k\right)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} 2^k} + 2^{n+1} - \left(2^0 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} 2^k}\right) = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1 \quad \square$$

Exercice $2\times\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1} - 1$ $\qquad 7\times\sum_{k=0}^{n} 8^n = 8^{n+1} - 1$

double somme Ex $\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{2} 1 = \sum_{k=1}^{n}(1+1) = \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$

$$= \sum_{h=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = \sum_{h=1}^{2} n$$

une double somme est une somme de sommes et on peut changer l'ordre

développement et factorisation $\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} a_k b_h = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{h=1}^{m} b_h\right)$

$a_1(b_1+\dots+b_m)+\dots+a_n(b_1+\dots+b_m)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{h=1}^{m} b_h\right)$$

$(a_1+\dots+a_n)(b_1+\dots b_m)$

Exemple $\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{m} 2^{k+h} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{m} 2^k\times 2^h = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right)\left(\sum_{h=0}^{m} 2^h\right) = (2^{n+1}-1)(2^{m+1}-1)$

Exercice $\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{m} 2^k\times 3^h = \frac{(2^{n+1}-1)(3^{m+1}-1)}{2}$

Produit $\prod$ et analyse combinatoire

$\prod_{k=1}^{3} 2^k$ "produit pour k allant de 1 à 3 de 2^k"

$= 2 \times 2^2 \times 2^3$ $(= 2\times 4 \times 8 = 64)$

$$\prod_{k=1}^{n} 3 = 3^n$$

la <u>factorielle</u> de n (ou n <u>factorielle</u>) est $n! \overset{\text{Déf}}{=} \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2 \times \cdots \times n$

$$(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{k=n+1}^{n+1} k = n! \times (n+1)$$

n	1	2	3	4	5	...
$n!$	1	2	6	24	120	

$n!$ croît <u>très</u> vite (et devient difficile à calculer)

une <u>permutation</u> (des nombres) de 1 à n est,

une liste ordonnée de (tous) ces nombres

ex. $(3,5,4,2,1)$ est une permutation de 1 à 5

Théorème Le nombre des permutations de 1 à n est $n!$

démonstration par récurrence sur n

$n=1$ une seule permutation 1 et $1! = \prod_{k=1}^{1} k = 1$

Remarques a] une permutation de 1 à $n+1$ détermine (en rayant $n+1$)

une permutation de 1 à n

Ex $n=4$, $n+1=5$ $(3, \cancel{5}, 4, 2, 1) \sim (3, 4, 2, 1)$

b] On retrouve la permutation initiale (de 1 à $n+1$)

en remettant $n+1$ à sa place (dist ex entre le 1° et le 2°)

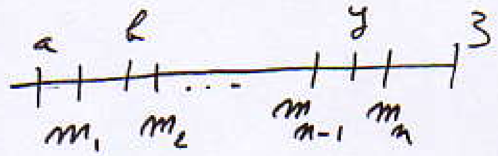
soit a) avant tous les autres

b) entre le premier et le second

⋮

y) entre l'avant dernier et le dernier

z) après tous les autres



"Pb des piquets"

$n+1$ possibilités

donc (nb de permutations de 1 à $n+1$) = (nb de permutations de 1 à n) $\times (n+1)$

|| (hyp. de récurrence)

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \qquad \square$$

fin de la démonstration

une ~combinaison~ de k (objets) ~parmi~ n (objets)

est un choix de k objets (sans distinguer leur ordre) parmi les n objets

Ex $\{2, 5, 3\}$ est une combinaison de 3 parmi 5

$\{5, 2, 3\}$ est la même combinaison de 3 parmi 5

Rmq pour tout $n \geq 5$ (par exemple $n = 6, 27, 2006 \ldots$)

$\{2, 5, 3\}$ est une combinaison de 3 parmi n.

on note $\binom{n}{k}$ le nombre des combinaisons de k parmi n

Lemme Si $k \leq n$ sont des entiers positifs

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{h=0}^{k-1} (n-h) = \frac{1}{(n-k)!} \prod_{\ell=0}^{n-k-1} (n-\ell)$$

pr $$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\prod_{h=1}^{n} h}{k!\,(n-k)!} = \frac{\prod_{h=1}^{n-k} h \times \prod_{j=n-k+1}^{n} j}{k!\,(n-k)!} = \frac{\cancel{(n-k)!} \prod_{h=0}^{k-1} (n-h)}{k!\,\cancel{(n-k)!}}.$$

Seconde égalité en changeant les rôles de k et n. □

Explicitation $$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k!}$$

Corollaire (du thm et du lemme)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{h=0}^{k-1} (n-h)$$

1° preuve En prenant les k premiers termes d'une permutation (et en oubliant leur ordre)
de 1 à n on obtient une combinaison de k parmi n

. Les permutations donnant ainsi la même combinaison
diffèrent par leur ordre sur les k premiers objets et
leur ordre sur les $n-k$ derniers objets : il y a $k!\,(n-k)!$ tels choix

d'où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$

la seconde égalité est le lemme. $\square$

2° pv le nb de choix de k objets ordonnés parmi n est

$$\overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{choix pour le 1°}}}{n} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{choix pour le 2°}}}{(n-1)} \times \cdots \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{choix pour le } k^{ième}}}{(n-(k-1))}}^{k \text{ termes}} = \prod_{h=0}^{k-1} (n-h)$$

pour obtenir le nb de combinaisons de 1 à n, c.a.d. le nb de choix de k objets non ordonnés, il faut diviser par le nombre d'ordres sur les k objets soit $k!$ .... $\square$

Quelques relations entre combinaisons

conventions a) $0! = 0$

cohérent avec $1 = \binom{n}{0}$ (nb de choix de 0 objets parmi n)

et $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$

et $1 = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,(0-0)!} = \frac{0!}{0!\,0!} = \frac{1}{1 \times 1} = 1$

$\cancel{1} = 1! = (0+1) = 0! \times 1 = 1 \times 1$

b) Si $k > n$ $\binom{n}{k} = 0$

cohérent avec $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{h=0}^{k-1} (n-h)$ (un des termes est 0)

Prop. 1
pour k et n entiers positifs on a

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \underset{(1)}{=} \binom{n}{k} \underset{(2)}{=} \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

pv de (1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ $\square$

Exercice preuve de (2)

Autre preuve de (1) : montrer (1) est la m̂ chose

que montrer $k \times \binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

$k \times \binom{n}{k}$ est le nb de combinaisons de k parmi n

avec un des k objets choisi marqué

On peut d'abord choisir cet objet n possibilité

puis compléter par un combinaison de $k-1$ parmi

les $n-1$ restant ~~ou abstract et com~~

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$ $\square$

Exercice autre preuve de (2)

Prop 2 Pour k et n entiers positifs

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(Formule du triangle de Pascal)

pv $\binom{n-1}{k}$ est le nb de choix de k objets parmi les $n-1$ premiers

= (le nb de choix de k parmi n tq le dernier n ne soit pas choisi)

$\binom{n-1}{k-1}$ est le nb de choix de $k-1$ objets parmi les $n-1$ premiers

= le nb de choix de k parmi n tq le dernier n est choisi

si on choisit k objets parmi n de deux choses l'une

soit le dernier n'est pas choisi

soit le dernier est choisi

(et les deux cas n'ont pas lieu en même temps) donc

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Exercice preuve avec les formules

Application calcul des $\binom{n}{k}$ par le triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	...	$k-1$	k
						0	0
0	1	0	0	0		0	0
1	1	1	0	0	...		
2	1	2	1	0			
3	1						
4	1						
	⋮						
$n-1$	1					$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$
n	1						$\binom{n}{k}$

plus efficace que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)$ pour le calcul.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

1.2 Trois formules à connaître

4 "mots" pour (sachant que n est entier) dire la m̂ chose

Thm 1 Pour tout entier positif n $(n>0 ; n \geqslant 1 ; n=1,2,\ldots)$

on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+i+\cdots+n-1+n = \frac{n(n+1)}{2}$

pv : Si i prend toutes les valeurs entières entre 1 et n alors

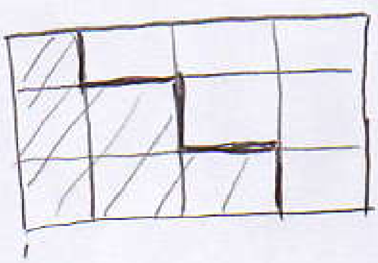
$n+1-i$ " " " " " n et 1 donc

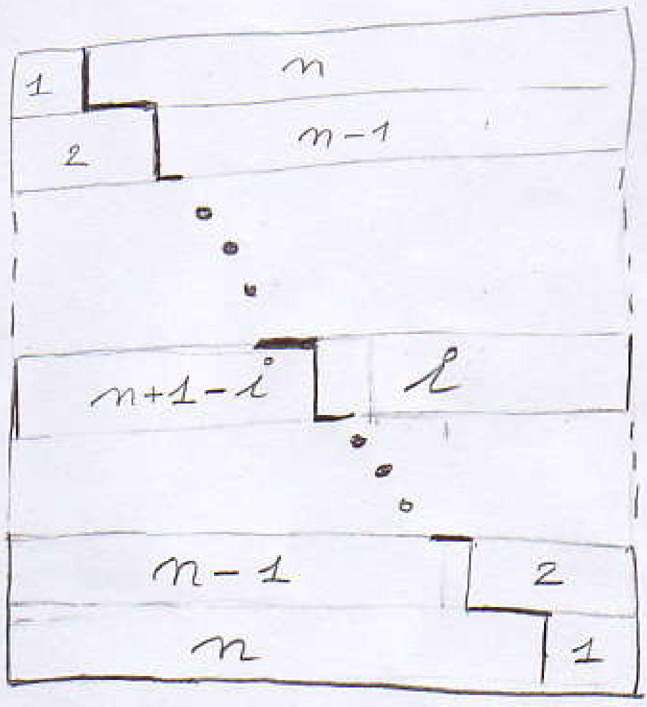
$$2\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} n+1-i + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} n+1-\cancel{i}+\cancel{i} = n(n+1). \qquad \square$$

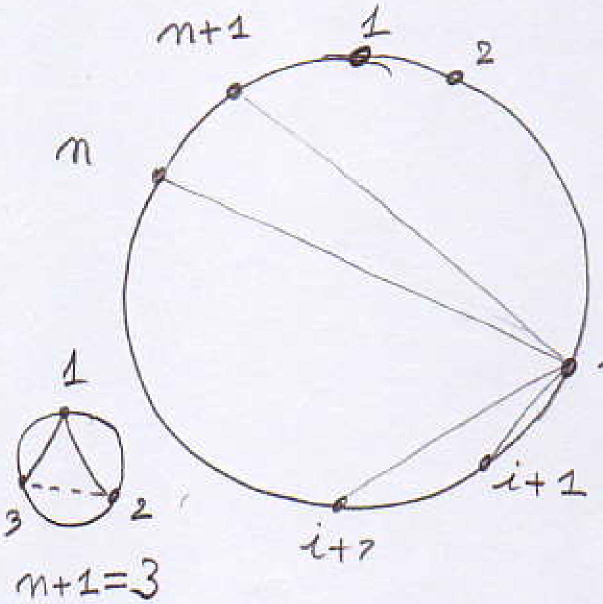
visualisation en $g^{\underline{l}}$

$n=3$





de maniere combinatoire



Le $i^{\text{ème}}$ convive, après avoir trinqué avec les précédents, doit trinquer avec les $n+1-i$ suivants

donc $\frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} n+1-i = \sum_{i=1}^{n} i$

Thm 2 Si n est un entier naturel ($n \geqslant 0$; $n = 0, 1, 2, \ldots$) et a, b sont des nombres (réels ou complexes)

$$a^{n+1} - b^{n-1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k}$$

$$= (a-b)\left(a^{n} + a^{n-1}b + \cdots + a^{n-k}b^{k} + \cdots + ab^{n-1} + b^{n}\right)$$

cas particuliers

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$2^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + c^3 = (a+c)(a^2 - ac + c^2)$$

$b = -c$ et $n = 2m+1$ impair

$$a^{2m+1} + c^{2m+1} = (a+c)\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^{2m-k} c^k$$

$$= (a+c)(a^{2m} - a^{2m-1}c + \cdots - ac^{2m-1} + c^{2m})$$

$a = 1$ $b = x$

$$1 - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = (1-x)(1 + \cdots + x^k + \cdots + x^n)$$

pv de thm 2 $\quad (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k} =$

$$a\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k} - b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k} = \sum_{k=0}^{n} a\times a^{n-k} b^{k} - \sum_{k=0}^{n} b\times a^{n-k} b^{k}$$

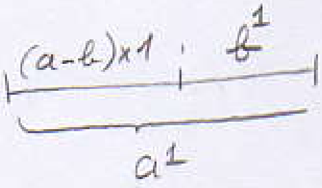
astuce

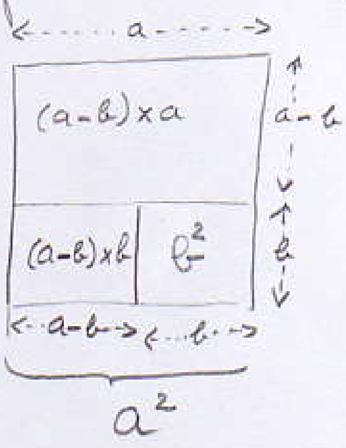
$$= \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k} b^{k} - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a^{n+1} b^{k} - \sum_{k=0}^{n} a^{\overline{n+1-(k+1)}} b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \cancel{\sum_{k=1}^{n} a^{n+1} b^{k}} - \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n+1-(k+1)} b^{k+1}} - b^{n+1}. \quad \square$$

Exercice pv par récurrence sur n de thm 2

et visualisation en faisant la 3° figure de





$n+1$ $\qquad$ 1 $\qquad$ 2 $\qquad$ 3

Thm3 Si n est un entier naturel ($n \geqslant 0$; $n = 0, 1, 2, \dots$) et a, b sont des nombres (réels ou complexes) alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= a^n + n a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + n a b^{n-1} + b^n$$

(Formule du binôme de Newton)

c'est pourquoi les $\binom{n}{k}$ sont appelés

coefficients binomiaux

pv : récurrence sur $n \geqslant 0$:

si $n = 0$ $\quad (a+b)^0 = 1$ (par conventions)

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \quad \Delta$$

Supposons la formule vraie pour n,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$\Updownarrow$ astuce !!

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-(k+1)} b^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^{h}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^{h} + \binom{n}{n} a^{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^{0} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{=\binom{n+1}{k}}\Big] a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n+1}{n+1} a^{0} b^{n+1}$$

par la formule du triangle de Pascal

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k}$$

la formule est vraie pour $n+1$.

$\square$

Corollaire 1) Si $n \geq 0$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

2) Si $m \geq 1$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{2m}{2i} = \sum_{j=1}^{m} \binom{2m}{2j-1}$

pair impair

pv : 1) $2^n = (1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \times 1^k$

2) $0 \underset{\uparrow}{=} (1+(-1))^{2m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} 1^{2m-k} \times (-1)^k$

car $2m \geq 2$ donc > 0

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k=2i \text{ pair}}}^{2m} \binom{2m}{k} \underbrace{(-1)^k}_{=1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k=2j-1 \text{ impair}}}^{2m} \binom{2m}{k} \underbrace{(-1)^k}_{=-1} . \square$$

pv combinatoire de thm 3

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\times\cdots\times(a+b)$$

produit de n binômes tous égaux à $(a+b)$

le developpement est une somme de 2^n monômes

$$a^i b^j \quad \text{avec } i+j=n$$

obtenus en prenant ds chaque terme du produit

soit a soit b

Ex $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

le choix $\times$ $\times$ $\times$ $\times$ donne $a\times a\times b\times a = a^3 b$

un terme est $a^{n-k} b^k$ si on a choisi

k fois b (et donc $n-k$ fois a) il y en a $\binom{n}{k}$. $\square$

Ex. preuve combinatoire (sans utiliser thm3)

du corollaire.

Application au calcul

Rappel Soit a, b, c des réels

- si $a < b$ alors $-b < -a$
- si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$
- si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Un encadrement Soit x, K des réels avec $0 < x < K < 1$

par thm 2 $$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^n$$

donc $$\frac{1}{1+x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^n < \frac{1}{1-x} < \sum_{k=0}^{n} x^n + \frac{x^{n+1}}{1-K} < \sum_{k=0}^{n} x^n + \frac{K^{n+1}}{1-K}$$

Ex $x = \frac{1}{10}$

$$1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n} < \frac{10}{9} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} < 1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\frac{10}{9}\times\frac{1}{10^{n+1}}$$

était claire (en poussez la division) $x = 1,111\ldots$

mais ________ avec $x = \frac{7}{299}$

Remarque Soit k un entier naturel et α un réel

les coeff^n du binôme généralisé $\binom{\alpha}{0} = 1$

et si $k \geq 1$ $\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(\alpha - h) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

ont les m̃ propriétés (montrées par le calcul)

que les coeff usuels (α entier)

2 $\binom{K}{k}$ n'est plus un nombre entier.

Exemple

i) $$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2i+1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{k!}(-1)^k \frac{\prod_{h=1}^{k}(2h-1)}{2^k}$$

$$= (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\prod_{h=1}^{k}(2h-1) \times \prod_{i=1}^{k} 2i}{2^k \times \prod_{i=1}^{k} 2i} = (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\prod_{j=1}^{2k} j}{2^k \times 2^k \times k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{k!\,k!} \times \frac{1}{2^{2k}} = (-1)^k \binom{2k}{k} \times \frac{1}{4^k}$$

ii) $$\binom{-\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\binom{-\frac{1}{2}}{k}$$

Compléments

Thm 3' Soit $0 < x \leq K < 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^{k} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} < \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^{k} + \binom{2n}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^{n}\frac{x}{1-K}$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x)^{k} < (1-x)^{-\frac{1}{2}} < \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x)^{k} + \binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{n+1}}{1-K}$$

Exercices ** 1) programmer la calculette et tester.

2) "En écrivant $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{1-x}$" montrer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^{n}$$