# Devoir 6

**5)** Soit $v = (a, b) \neq (0, 0) \in \mathbf{R}^2$ un vecteur non nul du plan. a) Prouver que

a1) l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(u) =< u, v >$ qui a $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ associe son produit scalaire $< u, v >= xa + yb$ avec $v$ est linéaire. Quel est son noyau?

a2) l'application $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, g(u) = \det(u, v)$ qui a $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ associe le déterminant $\det(u, v) = \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ de $u$ et $v$ est linéaire. Quel est son noyau?

b) Déterminer le noyau de $h = (f, g) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, h(u) = (f(u), g(u))$.

c) Il y a t il un vecteur $u \in \mathbf{R}^2$ tel que $h(u) = v$?

**6)** Soit $E$ le sous-espace de $\mathbf{R}^5$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ $v_2 = (1, -1, 1, 2, 1), v_3 = (3, -1, 3, 5, 3), v_4 = (1, 1, -1, 1, 1), v_5 = (2, 0, 0, 3, 2)$, $v_6 = (3, 3, 1, 3, 3), v_7 = (3, 1, 1, 4, 3)$ et $w = (3, 1, 1, 4, 3)$.

a) Déterminer une base de $E$ ainsi que les coordonnées dans cette base des vecteurs $v_1, \ldots, v_7$.

b) En déduire les solutions $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbf{R}^7$ du système

$$\sum_{k=1}^{7} x_k \cdot v_k = w$$

**7)** Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Après avoir rappelé les définitions de l'image $\mathrm{Im}(f)$ et du noyau $\ker(f)$ de $f$, prouver que $E$ est de dimension finie si et seulement si $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont tous deux de dimension finie.