Devoir 4 (révision des chapitres 1, 2 et 3)

Après avoir appris les parties correspondantes du cours,
étudier ces 13 (+2) problèmes, en rédiger au moins un et rendre vos rédactions
(pas plus de trois feuilles A4 recto verso) aux TD des 9 et 10 Novembre 2006.

Manipulation du symbole $\sum_{k=1}^{n}$ (Chapitres 1 et 3, semaines 36-37 et 40-41)

1) Soit $(a_k)_{k>0}, (b_k)_{k>0}$ deux suites complexes indicées par les les entiers positifs $[\forall k \in \mathbf{N}, k>0, a_k, b_k \in \mathbf{C}]$. Soit $A_0 = 0$ et pour tout entier n positif $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) Donner les valeur de A_m et $b_m - b_{m+1}$ quand $a_k = k$ et $b_k = k$.

b) Etablir pour tout entier positif n la relation

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot [b_k - b_{k+1}] + A_n \cdot b_{n+1}$$

c) Déduire de a) et b) la relation $n(n+1)^2 - A_n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2$ puis la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

d) Re-vérifier la formule obtenue en c) en la montrant par récurrence.

2) a) Soit deux réels u, v exprimer en fonction de $\cos u, \sin u, \cos v, \sin v$ les deux nombres $\sin(u+v) - \sin(u-v)$ et $\cos(u-v) - \cos(u+v)$.

b) Soit deux réels a, b et n un entier positif calculer les deux sommes

$$\sum_{k=-n}^{n} \sin((k+\frac{1}{2})a) - \sin((k-\frac{1}{2})a) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \cos((k-\frac{1}{2})a) - \cos((k+\frac{1}{2})a)$$

c) Déduire de a) et b), quand $\sin(\frac{a}{2}) \neq 0$ la valeur des sommes

$$\sum_{k=-n}^{n} \cos(k \cdot a), \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(k \cdot a) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(k \cdot a)$$

Que valent ces sommes si $\sin(\frac{a}{2}) = 0$?

d) On suppose $e^{ia} \neq 1$. Indépendamment de c), calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} (e^{ia})^k$.

En déduire, si $e^{ia} \neq 1$, une autre preuve des formules trouvées en c).

Nombres complexes, trigonométrie et géométrie (Chapitres 1, semaines 37 et 41)

3) Soit $\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha < \theta_1 < \beta < \theta_2 < \alpha + 2\pi$.

a) Prouver que les points $A = e^{i\alpha}, B = e^{i\beta}, C_1 = e^{i\theta_1}$ et $C_2 = e^{i\theta_2}$ sont sur le cercle unité $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ et deux à deux distincts.

b) Déterminer, pour $\theta = \theta_1, \theta_2$ le signe de $\cos(\frac{\beta-\alpha}{2}) - \cos(\theta - \frac{\alpha+\beta}{2})$.

c) Calculer $e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\overline{(e^{i\theta} - e^{i\alpha})}(e^{i\theta} - e^{i\beta})$ et en déduire c1) Si A, B, C sont sur un cercle de centre O et rayon R deux à deux distincts alors $2(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}) = (\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) \mod 2\pi$: *l'angle au centre est le double de l'angle inscrit*, puis c2) $2R\sin|(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}})| = CB$, d'où si les angles du triangle sont $\gamma = \widehat{ACB}, \alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{CBA} \in]0, \pi[$ la relation $\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = 2R$

4) Soit $a, b, c \in \mathbf{C}$ avec $a \neq 0$ et $r, r' \in \mathbf{C}$ les racines du trinôme $T(X) = aX^2+bX+c$.
a) Que valent $r+r'$ et rr'? En déduire en fonction de a, b et c la valeur de $(r-r')^2$
b) Prouver que si $a, b, c \in \mathbf{Z}$ et $r \neq r'$ alors $|r-r'| \geq \frac{1}{|a|}$.

5) a) Soit n un entier et $\theta \in \mathbf{R}$. Exprimer $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
b) En déduire que si $n = 2m+1, m \in \mathbf{N}$ est impair alors il y a $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ tels que $\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\sin\theta)^k$. Prouver que si $k = 2l$ est pair alors $a_{2l} = 0$ et $a_1 = n$.
c) Prouver $\sum_{k=1}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} = 2^{2m}$. En déduire $a_{2m} = (-1)^m 2^{2m}$ On a donc : $\sin((2m+1)\theta) = (2m+1)\sin(\theta) Q(\sin(\theta))$ où $Q(X) = \frac{1}{2m+1} \sum_{l=1}^{m} a_{2l+1} X^{2l}$.
c) Résoudre l'équation $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin((2m+1)\theta) = 0$.
d) Déduire de c) la factorisation $Q(X) = \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{X^2}{\sin(\frac{l\pi}{2m+1})^2}\right)$ puis les formules

$$\text{Si } m \in \mathbf{N}, m \geq 1 \text{ on a : } \quad \prod_{l=1}^{m} \sin\left(\frac{l\pi}{2m+1}\right) = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$\text{Si } x \in \mathbf{R} \text{ on a : } \quad \sin(\pi x) = (2m+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2m+1}\right) \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin(\frac{\pi x}{2m+1})^2}{\sin(\frac{l\pi}{2m+1})^2}\right)$$

Vérifier directement ces formules quand $m = 1$ (et donc $n = 2m+1 = 3$)

6) Linéariser $\sin^3\theta\cos^5\theta$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^x \sin^3\theta\cos^5\theta d\theta$.

Logique et Ensembles (Chapitres 2, semaines 38-39-40)

7) Soit $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}, H' = H \setminus \{(-1, 0)\} (= H \cap ({}^c\{(-1, 0)\})$,
$S =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ et pour $t \in \mathbf{R}, D_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; t(x+1) = y\}$.
a) Déterminer $H \cap D_t$. Représenter $D_{-1}, D_1, D_{1/2}, D_2$ et H sur une même figure.
b) Déduire de a) que si $s \in S$ alors $(\frac{1+s^2}{1-s^2}, \frac{2s}{1-s^2}) \in H$. L'application $f : S \to H$, $f(s) = (\frac{1+s^2}{1-s^2}, \frac{2s}{1-s^2})$ est-elle injective?, surjective?, bijective?
c) Prouver que si $(x, y) \in H'$ alors $|\frac{y}{x+1}| \neq 1$. Soit $g : H' \to S, g(x, y) = \frac{y}{x+1}$. Déterminer l'application composée $f \circ g$.
d) Est-il correct de parler de la composée $g \circ f$?, si $x \in X$ de considérer $g(f(x))$?
e) Déduire de c) et d) que g est bijective d'inverse $g^{-1} : S \to H', s \mapsto g^{-1}(s) = f(s)$.

8) Soit $A = \{(m, n) \in \mathbf{N}^2; 5m+7n \leq 35\}, A' = \{(m, n) \in A; 5m+7n \neq 35\}$ et $B = \{(m, n) \in \mathbf{N}^2, m \leq 7, n \leq 5, 5m+7n \geq 35\}, B' = \{(m, n) \in B, 5m+7n \neq 35\}$.
a) Représenter sur une figure les ensembles A et B et déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
b) Prouver que $A \cup B, A$ et B sont finis et ont au plus 48 éléments.
c) Soit $s : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2, s(m, n) = (7-m, 5-n)$. Déterminer $s \circ s$.
d) Prouver $s(A) = B, s(A') = B'$ et $f : A \to B, f(m, n) = s(m, n)$ est bijective.
e) Déterminer les nombre d'éléments Card(A) et Card(B) de A et de B

8') Soit a, b deux entiers positifs de plus grand commun diviseur $d = \text{p.g.c.d}(a, b)$. Prouver que $T_{a,b} = \{(m, n) \in \mathbf{N}; am+bn \leq ab\}$ est fini et $\text{Card}(T_{a,b}) = \frac{(a+1)(b+1)+d+1}{2}$
[expliquer, indépendamment de ce décompte, pourquoi le membre de droite est un entier]

9) Pour $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$ et $b \in \mathbf{C}$ soit $H_{a,b} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, H_{a,b}(z) = az + b$.
a) Prouver que $H_{a,b}$ est bijective et expliciter la bijection réciproque $H_{a,b}^{-1}$.

On note $t_b = H_{1,b}, h_a = H_{a,0} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, t_b(z) = z + b, h_a(z) = az$.
b) Vérifier $t_b \circ t_{b'} = t_{b+b'}, h_a \circ h_{a'} = h_{aa'}, t_b \circ h_a = H_{a,b}, t_0 = h_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.
En déduire $t_b^{-1} = t_{-b}, h_a^{-1} = h_{a^{-1}}$ puis $H_{a,b}^{-1} = h_{a^{-1}} \circ t_{-b}$. Comparer avec a).
c) Prouver que si $H_{a,b}(z_0) = z_0$ alors $t_{z_0}^{-1} \circ H_{a,b} \circ t_{z_0} = h_a$. En déduire que si il y a $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $H_{a,b}(z_0) = z_0$ alors soit $a \neq 1$ soit $a = 1$ et $b = 0$.
d) Prouver que si $a \neq 1$ il y a un unique $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $H_{a,b}(z_0) = z_0$.
e) Déduire de c) et d) que si $H_{a_1,b_1} \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \neq H_{a_2,b_2}$ et $H_{a_1,b_1} \circ H_{a_2,b_2} = H_{a_2,b_2} \circ H_{a_1,b_1}$ si et seulement si $\{z \in \mathbf{C}; H_{a_1,b_1}(z) = z\} = \{z \in \mathbf{C}; H_{a_2 b_2}(z) = z\}$ et que cet ensemble commun de points fixes est soit vide soit un singleton $\{z_0\}$
[pour $k = 1, 2$ dans le premier cas $a_k = 1, H_{a_k,b_k} = t_{b_k}$ et dans le second $H_{a_k,b_k} = t_{-z_0} \circ h_{a_k} \circ t_{z_0}$].

10) a) Soit $f : X \to Y$ une application et $B \subset Y$ une partie de son but Y. Prouver que l'image réciproque $f^{-1}({}^cB)$ du complémentaire de B dans Y est $f^{-1}({}^cB) = {}^cf^{-1}(B)$, le complémentaire dans X de l'image réciproque de B.
En déduire que si X est fini on a $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(f^{-1}(B)) + \mathrm{Card}(f^{-1}({}^cB))$.
b) On note $\{0, 1\}^E$ l'ensemble des applications de l'ensemble E dans $\{0, 1\}$.
b1) Prouver que l'application $u : \{0, 1\}^E \to \mathcal{P}(E), u(f) = f^{-1}(\{1\})$ est bijective et déterminer son application réciproque $f = u^{-1} : \mathcal{P}(E) \to \{0, 1\}^E$.
b2) En déduire que si E est fini alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.
c) Soit X un ensemble, n un entier naturel et $f : X \to \{0, 1, \ldots, n\}$ une application telle que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ l'ensemble $f^{-1}(\{k\})$ est fini.
En appliquant, si $n > 0$, a) à la partie $B = \{0, \ldots, n-1\}$ de $Y = \{0, \ldots, n\}$ prouver par récurrence sur n que l'ensemble X est fini et que l'on a

$$\mathrm{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(f^{-1}(\{k\})$$

d) Retrouver b2) avec c) pour l'application $\mathrm{Card} : X = \mathcal{P}(E) \to \{0, \ldots, \mathrm{Card}(E)\}, A \mapsto \mathrm{Card}(A)$.

Combinaisons linéaires dans $\mathbf{R}^n$ (Chapitres 3, semaines 41-42)

11) a) Rappeler la définition de, m étant un entier positif, *une famille $v_1, \ldots, v_m \in \mathbf{R}^n$ d'élément de l'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets de réels est libre.*
Expliciter cette définition avec des quantificateurs, écrire la négation de la proposition formelle obtenue et exprimer en français cette négation
[*c.a.d.* donner la définition de *la famille $v_1, \ldots, v_m \in \mathbf{R}^n$ est liée*].
b) Les énoncé *b1) Soit $u \in \mathbf{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $v_1 = \lambda u, v_2 = \mu u$ alors la famille v_1, v_2 est liée* et *b2) Si $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n$ sont liés alors il y a $u \in \mathbf{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $v_1 = \lambda u, v_2 = \mu u$.* sont-ils vrais?
c1) « *on a $\mu v_1 + (-\lambda) v_2 = \cdots = (\mu\lambda - \lambda\mu)u = 0u = 0$ donc la famille est liée* » démontre-t-il b1)?
c2) Prouver correctement les énoncés b1) et b2).
d) Peut-on déduire de *b1)* et *b2)* l'énoncé *d1) si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^n$ et les deux familles v_1, v_2 et v_2, v_3 sont liées alors la famille v_1, v_3 est liée*?.
Modifier les hypothèses de d1) pour en faire un énoncé vrai et prouver cet énoncé.

12) La partie non montrée en cours du théorème des cours de la semaine 41 est

Théorème. — *Soit $v_1, \ldots, v_m \in \mathbf{R}^n$ une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$*

(2) *Si $v_1, \ldots, v_m$ est libre alors $m \leq n$.*
Si de plus $m = n$ alors la famille est aussi génératrice.

On suppose $n > 1$ et note $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}, p(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

a) Prouver que si la famille $v_1, \ldots, v_m \in \mathbf{R}^n$ est libre et $p(v_1), \ldots, p(v_m) \in \mathbf{R}^{n-1}$ est liée alors le vecteur $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_m$.

a') Donner un contre-exemple à l'énoncé *si la famille* $v_1, \ldots, v_m \in \mathbf{R}^n$ *est telle que* $p(v_1), \ldots, p(v_m)$ *est liée dans* $\mathbf{R}^{n-1}$ *alors le vecteur* $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ *est combinaison linéaire de* $v_1, \ldots, v_m$.

A quel endroit de votre preuve de a) avez-vous utilisé que la famille $v_1, \ldots, v_m \in \mathbf{R}^n$ est libre?

b) On suppose $m > 1$ et $e_n = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k$ avec $\lambda_m \neq 0$. b1) Rappeler la preuve de[1]

Si $v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m$ *est libre si et seulement si* $v_1, \ldots, v_{m-1}, e_n$ *est libre.*

b2) Déduire, de a) pour la famille $v_1, \ldots, v_{m-1} \in \mathbf{R}^n$, que $p(v_1), \ldots, p(v_{m-1})$ est libre dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

c) Avec a) et b) démontrer (2) du théorème du cours de la semaine 41 par récurrence sur n.

Systèmes linéaires à coefficients entiers [suite des problèmes du contrôle et devoir 3]

13) Soit $n, B \in \mathbf{N}, n, B > 0$ des entiers positifs, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ avec $A = \sum_{k=1}^{n} |a_k| > 0$ et

$$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

0) Soit $x \in \mathbf{R}$ établir l'encadrement $x - |x| \leq 2x \leq x + |x|$.

a) En déduire qu'il y a des entiers $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $b - a = AB$ tels que

$$\text{si } (x_1, \ldots, x_n) \in C_B \overset{Def}{=} \mathbf{Z}^n \cap [0, B]^n \text{ alors } f(x_1, \ldots, x_n) \in [a, b] \cap \mathbf{Z} \overset{Def}{=} S_B$$

b) Déterminer les nombres d'éléments de C_B et S_B et vérifier $\mathrm{Card}(S_B) \leq A(B+1)$.

b') Donner une condition sur n et B assurant que $g : C_B \to S_B, g(x) = f(x)$ n'est pas injective.

c) Déduire de ce qui précède que si $n > 1$ et alors il y a $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{Z}^n$ avec, un des $x_k \neq 0$ non nul, chaque $x_k = x_1, \ldots, x_n$ vérifiant $|x_k| \leq A^{\frac{1}{n-1}}$ et $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

13') Soit $m, n, B \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ des entiers positifs, et pour[2] $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq k \leq n$ des entiers $a_{l,k}$, tels que pour $l = 1, \ldots, m$ on a $A_l = \sum_{k=1}^{n} |a_{l,k}| > 0$ on note $N = \prod_{l=1}^{m} A_l$ et

$$f_l : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_l(x) = f_l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{l,k} x_k$$

$$F : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^m, x \mapsto F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

Soit pour $l = 1, \ldots, m$ les entiers a_l, b_l donnés par **13)** pour $a_{l,1}, \ldots, a_{l,n}$ et $P_B \overset{Def}{=} \mathbf{Z}^m \cap \prod_{l=1}^{m} [a_l, b_l]$

a) Prouver que si $x \in C_B$ alors $F(x) \in P_B$.

b) Vérifier $\mathrm{Card}(P_B) \leq N(B+1)^m$.

b') Donner une condition sur n, m, B assurant que $G : C_B \to P_B, G(x) = F(x)$ n'est pas injective.

c) Déduire de ce qui précède que si $n > m$ et alors il y a $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{Z}^n$ avec, un des $x_k \neq 0$ non nul, chaque $x_k = x_1, \ldots, x_n$ vérifiant $|x_k| \leq N^{\frac{1}{n-m}}$ et

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Donner une majoration de N sous l'hypothèse pour tout $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq k \leq n$ on a $|a_{l,k}| \leq K$.

---

[1] (1) de la Proposition des cours de la semaine 41

[2] l pour ligne et k pour kolonne!