Troisième contrôle Mardi 5 Décembre 2006

Poly, notes de cours, calculatrice, téléphone portable interdits,

Question de cours

Répondre à une (et une seule) des deux questions **1)** ou **2)** suivantes :

1) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Soit n un entier positif, E un espace vectoriel réel et $v_1, \dots, v_n \in E$ une famille de n vecteurs de E.

a) Donner la définition de *la famille* $v_1, \dots, v_n$ *est libre* .

b) Prouver que la famille $v_1, \dots, v_n$ est libre si et seulement si l'application $f : \mathbf{R}^n \to E, f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$ est injective.

Exercices

3) Soit $n \geq 2$ un entier au moins égal à 2.
Prouver que si une famille $v_1, \dots, v_n \in E$ de n vecteurs d'un espace vectoriel E est libre alors pour $2 \leq k \leq n$ on a $v_k \neq v_1$.

4) L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel.

a) Soit $u_1 = (\sqrt{3}, -1, 2), u_2 = (1, \sqrt{3}, -2), u_3 = (-(1+\sqrt{3}), 1-\sqrt{3}, 0)$ et $w_1 = (0, -1, 1), w_2 = (1, 0, -1), w_3 = (-1, 1, 0)$.

a1) Déterminer une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ du plan $\mathbf{P}$ passant par les trois points w_1, w_2, w_3. [*c.a d.* déterminer quatre réels a, b, c, d tels qu'un point $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ est dans $\mathbf{P}$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$]

a2) Calculer les somme $\sum_{k=1}^{3} u_k, \sum_{k=1}^{3} w_k$, pour $1 \leq i, j \leq 3$ les produits scalaires $< u_i, u_j >, < w_i, w_j >$ et pour $1 \leq k \leq 3$ les normes $\|u_k\|, \|w_k\|$.
En déduire la valeur des angles $\widehat{u_1, u_2}$ et $\widehat{w_1, w_2}$.

Soit $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^3$ trois vecteurs tels que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

b) Prouver que le rang de la famille v_1, v_2, v_3 est au plus 2.
Donner des exemples de familles vérifiant les hypothèses de b) et de rang $0, 1$ et 2.

c) On suppose de plus $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = L$.
Prouver que la famille v_1, v_2, v_3 n'est pas de rang 1.

d) Exprimer le produits scalaire $< v_1, v_2 >$ en fonction de $\|v_1\|^2, < v_1, v_3 >$.
puis le produits scalaire $< v_2, v_3 >$ en fonction de $\|v_2\|^2, < v_2, v_1 >$.

e) On suppose les hypothèses de c). Déduire de d) les valeurs des trois produits scalaires $< v_1, v_2 >, < v_2, v_3 >, < v_3, v_1 >$ en fonction de L,
puis, si $L \neq 0$, les angles $\widehat{v_1, v_2}, \widehat{v_2, v_3}, \widehat{v_3, v_1} \in [0, \pi]$.