Premier contrôle Mardi 10 octobre 2006

Poly, notes de cours, calculatrice, téléphone portable interdits, le barème est donné à titre indicatif

Question de cours (sur 4 points)

Répondre à une (et une seule) des deux questions **1)** ou **2)** suivantes :

1) Indiquer comment, à l'aide de l'exponentielle complexe, retrouver les formules d'addition de sinus et cosinus.
[qui si $a, b \in \mathbf{R}$ expriment $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a), \sin(a), \cos(b)$ et $\sin(b)$]

2) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications telles que $g \circ f$ est injective.
Que pouvez-vous en déduire sur f et g?
[on demande de justifier par une démonstration et/ou un contre-exemple]

Exercice (sur 4 points)

Résoudre un (et un seul) des deux exercices **3)** ou **4)** suivants :

3) a) Donner les racines dans $\mathbf{C}$ de l'équation

$$T(X) = (1+i)X^2 - 6X + 4 - 4i = 0$$

b) Si r et r' sont les racines de $T(X)$ calculer $r^8 + (r')^8$
[On donne les valeurs $2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096, 2^{13} = 8192$]

4) Prouver par récurrence que pour tout entier positif n on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} k! < 2 \cdot n!$$

Problème (sur 12 points)

5) Soit $B \in \mathbf{N}, B \geq 1$ un entier positif. a) Combien d'éléments ont les ensembles

$$S_B = \{k \in \mathbf{Z}\ ;\ -47B \leq k \leq 70B\} = \{-47B, -47B+1, \ldots -1, 0, 1, \ldots, 70B-1, 70B\}$$

$$C_B = \{(l, m, n) \in \mathbf{Z}^3\ ;\ (0 \leq l \leq B) \text{ et } (0 \leq m \leq B) \text{ et } (0 \leq n \leq B)\}$$

Expliciter ces nombres d'éléments de S_B et de C_B dans le cas $B = 10$.
[On donne les valeurs numériques $7^3 = 343, 8^3 = 512, 9^3 = 729, 11^3 = 1331, 12^3 = 1728, 13^3 = 2197$]

b) A quelle condition l'ensemble C_B a strictement plus d'éléments queS_B?

6) On considère l'application $f : \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}, f(l, m, n) = 29 \cdot l + 41 \cdot m - 47 \cdot n$

a) Prouver $f(C_B) \subset S_B$.
L'application f induit donc $g : C_B \to S_B, \forall (l, m, n) \in C_B, g(l, m, n) = f(l, m, n)$.

b) Prouver que si $B \geq 10$ il y a deux éléments $(l, m, n), (l', m', n') \in C_B$ distincts $[(l, m, n) \neq (l', m', n')]$ tels que $g(l, m, n) = g(l', m', n')$.

c) Déduire de ce qui précède que l'équation

$$29 \cdot X + 41 \cdot Y - 47 \cdot Z = 0$$

a une solution $X = p, Y = q, Z = r$ où p, q, r sont des entiers non tous nuls et de valeur absolue au plus 10.
[*c.a.d.* $(p, q, r) \in \mathbf{Z}^3, (p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ avec $29 \cdot p + 41 \cdot q - 47 \cdot r = 0$ et $|p| \leq 10, |q| \leq 10, |r| \leq 10$]

Questions subsidiaires et/ou devoir [à rendre les 19 et 20 Octobre 2006]

Retour sur **3)**

3') Soit $\{r, r'\} \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des racines de l'équation $(1+i)X^2 - 6X + 4 - 4i = 0$

a) Calculer, et les exprimer sous la forme $a + ib; a, b \in \mathbf{R}$, les nombres $r + r'$ et $r \cdot r'$.

b) Existe-t-il des nombres $z, z' \in \mathbf{C}$ tels que $|z| = |z'| = 2$ et $|z + z'| = 3\sqrt{2}$?

c) Déduire de a) et b) que r et r' sont de modules différents.

On suppose dorénavant $|r| < |r'|$.

d) Calculer, et les exprimer sous la forme $a + ib; a, b \in \mathbf{R}$, les nombres r et r'.

e) Calculer r^8 et $(r')^8$.

Suite du problème (préparation aux chapitres 3 et 4 du cours)

7) Dans le plan $\mathbf{R}^2$ on considère la droite D d'équation $29x + 41y = 47$.

a) Déduire de **6)** que D a un point (x, y) avec $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ des fractions de même dénominateur et telles que dénominateur et valeur absolue des numérateurs sont au plus 10 [*c.a.d.* $a, b, c \in \mathbf{Z}, c > 0, |a|, |b|, c \leq 10$].

b) Prouver qu'il y a des uniques $u, v \in \mathbf{Z}$ avec $u > 0$ tel que (u, v) et un vecteur directeur D et que pour tout vecteur directeur (u', v') de D à coefficients entiers il y a $k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$ tel que $(u', v') = k(u, v) = (ku, kv)$].

c) Vérifier que D contient $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ [ce qui reprouve a) sans utiliser **6)**].

c1) L'unité étant le centimètre, tracer la droite passant par les points $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + (\frac{u}{2}, \frac{v}{2})$.

c2) Comparer ce tracé de D et celui obtenu avec les points d'intersection avec les axes.

d) Prouver $D \cap \mathbf{Q} = \{(-\frac{1}{2} + u\frac{s}{2t}, \frac{3}{2} + v\frac{s}{2t})\ ;\ s, t \in \mathbf{Z}$ avec $t > 0\}$.

e) Soit $s \in \mathbf{Z}$. Tracer les graphes de $a, b : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, a(t) = 41s - t, b(t) = 3t - 29s$

En déduire que si $(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3$ avec $c > 0$ et $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \neq (\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) \in D \cap \mathbf{Q}^2$ alors

e1) l'un des nombres $|a|, |b|$ ou c est au moins 15.

e2) il y a un seul tel triplet avec tous les trois nombres $|a|, |b|$ et c au plus 15.

e3) L'unité étant 10 cm, tracer la droite[1] passant par $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $(\frac{13}{15}, \frac{8}{15})$.

e4) Auriez-vous pu prendre 10 cm pour unité dans la question c)?

---

[1] De c) puis e3) déduire graphiquement les points d'intersection $(\frac{47}{29}, 0)$ et $(0, \frac{47}{41})$ de D avec les axes et comparer la qualité des deux approximations de $\frac{47}{41} = 1,4634\ 14634\ 14634 \cdots$ et surtout $\frac{47}{29} = 1,6206896551724137931034482758\ 620 \cdots 758\ 620 \cdots 758\ \cdots$ ainsi obtenues.