1.4 *Produit, somme directe et module libre sur un ensemble.*

Définition. Soit $N_i, i \in I$ une famille de Λ-modules indexée par un ensemble I. Le Λ-*module produit* $\prod_{i\in I} N_i$ est l'ensemble des suites $(n_i)_{i\in I}$ indicées par I dont les $i^{\text{ièmes}}$ éléments sont des éléments de N_i. Cet ensemble de suites est muni de l'addition et de l'action de Λ composante par composante :

$$(n_i)_{i\in I} + (n'_i)_{i\in I} = (n_i + n'_i)_{i\in I} \text{ et } \lambda\,(n_i)_{i\in I} = (\lambda\, n_i)_{i\in I}$$

Pour tout $k \in I$ le morphisme défini par $\mathrm{pr}_k((n_i)_{i\in I}) = n_k$ est la $k^{\text{ième}}$ *projection* :

$$\mathrm{pr}_k : \prod_{i\in I} N_i \to N_k$$

Si $f_i : X \to N_i, i \in I$ est une famille indexée par I de morphismes d'un Λ-module X vers les N_i alors il y a un unique morphisme $f : X \to \prod_{i\in I} N_i$ tel que pour tout $i \in I$ on ait $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$, il est donné par $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$:

Proposition 1. — *L'application* $f \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ f)_{i\in I}$ *est un isomorphime de groupe abélien de* $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \prod_{i\in I} N_i)$ *sur* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N_i)$.

Si les modules N_i sont bilatéraux[1] c'est un isomorphisme de Λ-modules.

Définition. Soit $M_j, j \in J$ une famille de Λ-modules d'ensemble d'indices J. Les suites $(m_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} M_j$ dont *presque toutes* les composantes sont nulles[2] forment un sous-Λ-module de $\prod_{j\in J} M_j$ appelé *somme directe des* M_j, et noté

$$\oplus_{j\in J} M_j$$

L'inclusion $\mathrm{i}_J : \oplus_{j\in J} M_j \to \prod_{j\in I} M_j$ de la somme directe dans le produit est surjective si et seulement si l'ensemble $\{j \in J |\ M_j \neq 0\}$ est fini.

Pour tout $k \in J$ on a la $k^{\text{ième}}$ *inclusion*

$$\mathrm{i}_k : M_k \to \oplus_{j\in J} M_j$$

le morphisme défini par $\mathrm{i}_k(m) = (m_j)_{j\in J}$ où $m_k = m$ et $m_j = 0$ pour $j \neq k$.

Si $g_j : M_j \to Y, j \in J$ est une famille, indexée par J, de morphismes de M_j vers un Λ-module Y alors il y a un unique morphisme :

$$g : \oplus_{j\in J} M_j \to Y$$

tel que pour tout $j \in J$ on ait :

$$g \circ \mathrm{i}_j = g_j$$

il est donné par $g((m_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} g_j(m_j)$, cette somme étant bien définie car, sauf pour un nombre fini d'entre eux, les m_j, donc les $g_j(m_j)$, sont nuls.

[1] par exemple si l'anneau Λ est commutatif et les N_i sont munis de leur structure canonique.

[2] *c. a d.* la suite $(m_j)_{j\in J}$ est de *support*, l'ensemble $\{j \in J, m_j \in 0\}$, fini.

Proposition 2. — *L'application* $g \mapsto (g \circ \mathrm{i}_j)_{j\in J}$ *est un isomorphisme du groupe abélien* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\oplus_{j\in J} M_j, Y)$ *sur le groupe abélien* $\prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_\Lambda(M_j, Y)$.

Si le module Y est muni d'une structure bilatérale[3] c'est un isomorphisme de Λ-modules.

Lemme et définitions. — *Soit* $P \subset M$ *un sous-module de* M *tel qu'il y ait un sous-module* $Q \subset M$ *avec* $P \cap Q = 0$ *et* $P + Q = M$*. Alors l'application*

$$P \oplus Q \to M$$

définie par les inclusions de P *et* Q *dans* M *est un isomorphisme.*

On dit alors que P *est un facteur direct de* M*, que* Q *est un supplémentaire de* P *dans* M *et que* M *admet la décomposition en somme directe* $M = P \oplus Q$.

De même si une famille $M_j \subset M$, $j \in J$ de sous-modules de M vérifie :

$$\sum_{j\in J} M_j = M \text{ et pour chaque } j_0 \in J,\ M_{j_0} \cap \Big(\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} M_j \Big) = 0$$

alors le morphisme $\oplus_{i\in J} M_j \to M$ défini par les inclusions des M_j dans M est un isomorphisme.

On dit alors que M admet la *décomposition en somme directe* $M = \oplus_{i\in J} M_j$.

Ainsi si $M = \oplus_{j\in J} M_j$ est décomposition en somme directe d'un Λ-module M et $N = \prod_{i\in I} N_i$ est décomposition en produit d'un Λ-module N l'application

$$f \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{i}_j)_{(i,j)\in I\times J}$$

est un isomorphisme de groupe abélien de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ sur $\prod_{(i,j)\in I\times J} \mathrm{Hom}_\Lambda(M_j, N_i)$.

Définition. la *matrice d'endomorphismes* de f associée à ces décompositions est :

$$(f_{i,j}(f) = \mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{i}_j)_{(i,j)\in I\times J} \in \prod_{(i,j)\in I\times J} \mathrm{Hom}_\Lambda(M_j, N_i)$$

Si un troisième Λ-module $L = \oplus_{k\in K} L_k$ est décomposé en somme directe et $g : L \to M$ une application linéaire telle que la matrice de $\mathrm{i}_J \circ g$ est $(g_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$. Alors la matrice $(h_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ de l'application composée $h = f \circ g : L \to M \to N$ est donnée par la formule du calcul matriciel des endomorphismes :

$$h_{i,k} = \sum_{j\in J} f_{i,j} \circ g_{j,k}$$

qui un sens même si J est infini car le but de g étant la somme directe $M = \oplus_{j\in J} M_j$ pour chaque $k \in K$ et $z \in L$ il n'y a qu'un nombre fini de j tels que $g_{j,k}(z) \neq 0$ soit non nul et la somme $\sum_{j\in J} g_{j,k}(z)$ est en fait finie.

Soit I un ensemble. On choisit pour chaque $i \in I$ un exemplaire Λ_i de l'anneau Λ, on note son unité 1_i et on le considère comme Λ-module à gauche, ainsi $\Lambda_i = \{\lambda 1_i \mid \lambda \in \Lambda\}$.

[3] *p. e.* l'usuelle (resp. canonique) si $Y = \Lambda^n$ (resp. Λ est commutatif).

Définitions. Le Λ-*module libre sur* I est la somme directe

$$L_I = \oplus_{i\in I}\Lambda_i$$

(s'identifiant au module $\Lambda^{(I)}$ des lignes dans Λ indicées par I d'éléments presques tous nuls), munie de l'application $\mathrm{e}_I : I \to L_I$ définie par :

$$\mathrm{e}_I\,(i) = e_i = (e_{i_j})_{j\in I} \text{ où } e_{i_j} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } e_{i_i} = 1_i$$

L'élément e_i est dit *élément canonique d'indice i de base de* Λ_I.

Cette application $\mathrm{e}_I : I \to L_I$ a la propriété universelle suivante :

Proposition 3. — *Pour toute application* $f : I \to M$ *d'un ensemble* I *vers un* Λ-*module* M *il y a un unique morphisme*

$$L(f) : L_I \to M \quad \text{tel que} \quad L(f) \circ \mathrm{e}_I = f$$

c'est le morphisme de la somme directe $\oplus_{i\in I}\Lambda_i$ *vers* M *déterminé par les morphismes* $f_i : \Lambda_i \to M,\ \lambda\, 1_i \mapsto \lambda\, f(i)$.

De même que l'on a identifié L_I aux lignes d'éléments de Λ indicées par I, on utilisera l'abus de notation f pour $L(f)$.

Définition. Un Λ-*module libre de base* $(b_i)_{i\in I}$ est un Λ-module L muni d'un isomorphisme $\varphi : L_I \to L$ tel que pour tout $i \in I$ on ait $\varphi\,(e_i) = b_i$.

L'isomorphisme réciproque $\psi : L \to L_I$ associe à chaque élément $x \in L$ la ligne $(x_i)_{i\in I}$ de ses *coordonnées dans la base* $(b_i)_{i\in I}$.

On a alors l'écriture unique $x = \sum_{i\in I} x_i\, b_i$. De plus l'inclusion $\{b_i |\ i \in I\} \hookrightarrow L$ possède la propriété universelle de la Proposition 3.

Corollaire. — *Soit* $f : M \to N$ *une application* Λ-*linéaire surjective et* $g : L \to N$ *un morphisme de source un* Λ-*module libre* L *de base* $(b_i)_{i\in I}$.

Alors, si les $c_i \in M$ *sont tels que* $f\,(c_i) = g(b_i)$, *l'application* Λ-*linéaire* $\tilde{g} : L \to M$ *déterminée par* $\tilde{g}\,(b_i) = c_i$ *vérifie la relation* $g = f \circ \tilde{g}$.

Commentaires bibliographiques

Les notions de somme et produit en algèbre, plus généralement de problème universel, ainsi que le procédé de construction qui à un ensemble I associe le module libre sur I sont[4] de nouvelles illustrations du *point de vue des catégories et foncteurs* qui est implicite dans **[vW]**, **[Bo]** et est plus amplement développé dans **[Lg]** et dans le Vocabulaire mathématique de **[Co]**.

[4] après la notion sous-objet et de quotient de **1.2**.