Séries de Fourier et ensembles d'unicité (Lucien Guillou)

Notes de Sophie Reignier

Séries trigo
Théorie des ens

Une série trigonométrique est une série infinie δ forme

$$S \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \begin{array}{l} a_n \in \mathbb{C} \\ x \in \mathbb{R} \end{array}$$

cvg?

on voit ça ĉ 1 express: formelle sans rien supposer sur la cvgce en x.

La $N^{\text{ième}}$ somme partielle est le polynôme trigo $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Si pour x donné $S_N(x) \longrightarrow s \in \mathbb{C}$ on écrit $s = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

et s s'appelle la somme δ série en x.

Une fc° $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ admet un dvlp^t trigo $\sqrt{\text{général}}$ s'il existe une série trigo S tq

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Biensûr, f doit ê 2π-périodique !

Il est très difficile de caractériser les fc° f qui admettent un dvlp^t trigo.

Ms, classiq^t, tte fc° 2π-périodique "assez jolie" (p/ exple continûement dérivable)

admet 1 dvlp^t trigo $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ où a_n et b_n se calculent

par les formules de Fourier $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$

Question. Une telle expression est-elle unique?

Si $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0'}{2} + \sum(a_n' \cos nx + b_n' \sin xn)$

par soustraction, on aurait $0 = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n \sin nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dc la q° équivaut à Pb d'unicité Si $\frac{a_0}{2} + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est une série trigo

tq $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{c_0}{2} + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ a-t-on $a_n = b_n = 0 \; \forall n$?

- G. Cantor a résolu ce pb p/ l'affirmative.

Ds sa recherche d'extensions où on permet un ens. de points exceptionnel E sur lesquels il n'y a pas cvg vers 0, il a été amené à créer la théorie des ensembles, en particulier le concept de nombre ordinal et la méthode d'induction transfinie.

A E on associe $E' = \{$points limites de $E\} = \{x \in \mathbb{R}$ tq $\exists e_n \in E$ ts distincts tq $e_n \to x\}$

(supposé fermé)

$E' \subset E.$

exple : $- E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1} \quad E' = \{0\}$

$- E = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\}_{n,m\geq 1} \cup \{\frac{1}{n}\} \cup \{0\} \qquad E' = \{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1} \cup \{0\} \quad E'' = \{0\}$

$E \supset E^{(1)} \supset E^{(2)} \supset \dots \supset E^{(n)} \supset \dots \supset E^{(\infty)} = \bigcap_{n\geq 1} E^{(n)}$ tjs fermés

$(E^{(\infty)})' = E^{(\infty+1)} \supset E^{(\infty+2)} \supset \dots \supset E^{(\infty+\infty)}$

Toute série trigo $S \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ peut aussi s'écrire $S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

où $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ $\quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ (où on a posé $b_0 = 0$) $\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$

Soit $a_n = c_n + c_{-n}$ $\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$

$b_n = i(c_n - c_{-n})$ $n \geq 1$

de cette notaᵒ, les sommes partielles $S_N(x)$ s'écrivent $\boxed{S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}}$

Si elles cvg lorsq $N \to \infty$ avec limite s on écrit $s = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

L'exple std de série trigo est celui des séries de Fourier des fᶜ intégrables:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et intégrable (càd $\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt < \infty$)

on définit ses coeffᵗˢ de Fourier

$\hat{f}(n), n \in \mathbb{Z}$ pᵃʳ $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\,dt = c_n$

On appelle la série trigo $S \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ la série de Fourier de f.

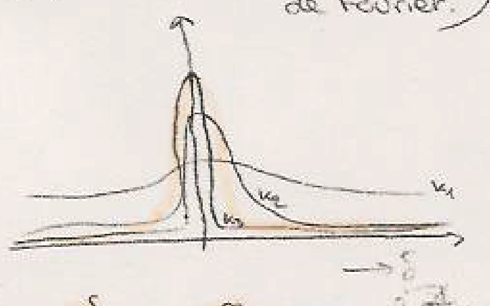
et on écrit $\boxed{S_N(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}}$ pr les sommes partielles

Rmq: Il y a des séries trigo, ex $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$ q' cvg pr tt ms ne st pas des séries de Fourier.

Suites de Dirac

$H = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$H' = \begin{cases} \delta(x) = 0 & x \neq 0 \\ \delta(0) = +\infty \end{cases}$



Par une suite de Dirac,

on entend une suite de fᶜᵗᵒⁿˢ

$K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq 1) $K_n(x) \geq 0$ $\forall n \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) K_n est continue et $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)\,dt = 1$

3) Donnés $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\int_{-\infty}^{-\delta} K_n + \int_{\delta}^{\infty} K_n < \varepsilon$

Ds bpc d'exples K_n est paire $K_n(x) = K_n(-x)$

On peut remplacer $]-\infty, +\infty[$ pr $[-c, c]$ $c > 0$ si K_n est $2c$-périodique

Déf: Si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et bornée (M)

on définit sa convolution avec K_n par $f_n(x) = K_n * f(x) := \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K_n(x-t)\,dt}_{\text{intégrable sous les hyp}}$

* Thme f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, bornée

Soit $S \subset \mathbb{R}$ un compact sur lequel f est continue

Alors $f_n = K_n * f$ cvg uniformᵗ vers f sur S.

preuve pᵃʳ changᵗ de variable $f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) K_n(t)\,dt$

f $2c$-périodique, K_n aussi

$$\left[\int_{-c}^{c} f(t) K_n(x-t)\,dt \underset{u = x-t}{=} \int_{x+c}^{x-c} f(x-u) K_n(u)(-du) = \int_{x-c}^{x+c} f(x-u) K_n(u)\,du \underset{2c\text{-pér.}}{=} \int_{-c}^{c} f(x-t) K_n(t)\,dt \right]$$

par 2) $f(x) = f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)\,dt}_{=1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_n(t)\,dt$.

d'où $f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-t) - f(x)] K_n(t)\,dt$

Soit $x \in S$, S est compact donc f est unif. continue sur S.
donc donné $\varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ tq $|t|<\delta \Rightarrow |f(x-t)-f(x)|<\varepsilon$

Soit M une borne de f. on choisit N tq $n \geq N \Rightarrow \int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{\infty} k_n < \frac{\varepsilon}{2M}$ (d'ap. prop 3) de k_n)

on a $|f_n(x)-f(x)| \leq \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) |f(x-t)-f(t)| \underbrace{k_n(t)}_{\geq 0} dt$

$$\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) |f(x-t)-f(x)| k_n(t) dt \leq 2M\left[\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) k_n(t) dt\right] \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t)-f(x)| k_n(t) dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon k_n(t) dt \leq \varepsilon \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} k_n}_{=1} = \varepsilon$$

d'où $|f_n(x)-f(x)| \leq 2\varepsilon$ si $n \geq N$. cqfd $\varepsilon_x)$ $\varepsilon(x)$ $\Rightarrow$ cvg unif

: k_n est un noyau : fct dont on se sert pour convoler

On considère f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques intégrables
On pose $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t) dt$: convolution de f et g.
On va convoler f par 2 types de noyau.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{noyau de Diriclet } D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \\ \text{noyau de Fejer } k_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} D_m(x) \end{array}}$$?) prés

Thme : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue p morceaux, 2π-périodique f?
$f * D_n(x) = S_n(x)$ = somme partielle δ série de Fourier de f

et $f * k_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}$ - m̃ des sommes partielles

[cf : si $a_n \to l$ alo $\frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n} \to l$ Césaro] réciproque pas vraie $a_n = (-1)^n$ $a_n \not\to l$ $\frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

preuve $f * D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-n}^{n} e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \sum_{-n}^{n} e^{ikx} \hat{f}(k)$$

$$f * k_n(x) = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{m=0}^{n-1} D_m(x-t) dt$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(x-t) dt$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f * D_m(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_m(x)$$

Thme. Les noyaux de Fejer, k_n, forment une suite de Dirac

preuve $\cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{m} \cos kx = -1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{m} e^{ikx}\right)$

$$\cdot \sum_{k=0}^{m} e^{ikx} = \frac{1 - e^{ix(m+1)}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-ix/2} - e^{ix(m+\frac{1}{2})}}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{+\sin\frac{x}{2} + \sin\left[(m+\frac{1}{2})x\right] + i\,\mathrm{Re}(\ )}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

en prenant la partie réelle, on tire

$$1+2\sum_{k=1}^{m}\cos(kx)=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

* d'ô part pr $n\geq 1$ $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}e^{imx}=\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=\frac{\overbrace{1-\cos nx}^{2\sin^2\frac{nx}{2}}-i\sin nx}{e^{ix/2}\underbrace{(e^{-ix/2}-e^{ix/2})}_{(-2i\sin\frac{x}{2})}}$

on multiplie pd $e^{ix/2}$ et on regarde les parties imaginaires :

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sin\left[\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x\right]=\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

Donc $\boxed{k_n(x)}=\displaystyle\frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikx}=\frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(1+\sum_{k=1}^{m}2\cos(kx)\right)$

$$=\frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin x/2}=\boxed{\frac{1}{2\pi n}\times\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

d'où 1°) $k_n(x)\geq 0$, k_n paire

2°) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}k_n(x)\,dx=\frac{1}{2\pi n}\underbrace{\sum_{m=0}^{n-1}\Bigg[\sum_{k=-m}^{m}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}\,dx}_{0\text{ sauf }k=0}\Bigg]}_{2\pi}=\frac{1}{2\pi n}2\pi\times n=1.$

3°) $\varepsilon>0$ $\delta>0$

$$0\leq\frac{1}{2\pi n}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin^2\frac{t}{2}}dt\leq\frac{1}{2\pi n}\underbrace{\int_{\delta}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}}}_{\text{nb fixe}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$\left(\underset{\text{paire}}{=}\int_{-\pi}^{-\delta}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}n\text{ gd}\\<\varepsilon\end{smallmatrix}\right)$

<u>Cor.</u> Les fc° $f*k_n$ cvg <u>unif^t</u> vers f s/ H compact où f est continue
càd $\underbrace{\dfrac{S_0(x)+\dots+S_{n-1}(x)}{n}}_{\text{polynome trigo (somme finie cos, sin)}}\longrightarrow f(x)$ <u>unif^t</u> sur H compact où f continue

<u>Thme</u> f continue 2π-périodique dont ts les coeff de Fourier st ~~nuls~~ <u>alo</u> $f=0$
(autr^t dit, $f\longrightarrow\hat{f}$ ($\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$) est injective)

<u>Preuve</u> : Il existe une suite $\overset{f*k_n}{\overset{\shortparallel}{P_m}}$, $m>0$, de poly trigo q cvg unif^t vers f sur $[-\pi,\pi]$.

$P_m=\displaystyle\sum_{\text{finie}}\alpha_k e^{ikx}$ (les α_k dpd de m.)

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{P_m}(x)\,dx=\sum\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx=\sum\alpha_k\hat{f}(k)=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\bar{f}(x)\,dx\underset{\substack{\text{cvg unif.}\\ \text{de }\bar{P}_m\text{ vers }\bar{f}\text{ (thme précéd.)}}}{=}\lim\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{P_m}(x)\,dx}_{=0}=0$$ $\bar{f}$ car aval. $\mathbb{C}$.

d'où $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2=0$ or $|f|^2$ continue, ≥ 0

$\Rightarrow |f|^2=0\Rightarrow f=0$ sur $[-\pi,\pi]$

or f 2π-périodiq $\Rightarrow f=0$ sur $\mathbb{R}$.

Cor : 2 fct° 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ coeff. de Fourier sont égales

Thm Soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ des complexes tq $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ cvg unif^t $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ sur $[-\pi,\pi]$)

et soit $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ (g est automatiq^t continue)

Alors c_n est le coeff de Fourier de g et dc $\sum c_n e^{inx}$ est la série de Fourier de g

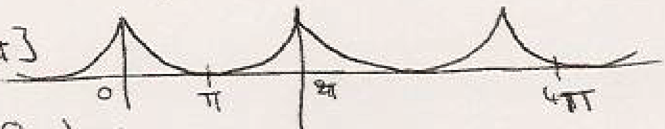
Preuve : $\hat{c}$ e^{inx} bornée $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} e^{-inx}$ cvg unif^t vers $g(x)e^{inx}$

Donc on peut intégrer termes à termes sur $[-\pi,\pi]$

$$\hat{g}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum c_k e^{ikx}e^{-imx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_k c_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-imx}dx}_{=0\ k\neq m} = \frac{1}{2\pi}2\pi c_m = c_m \text{ cqfd.}$$

exple : $g(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ sur $[0,2\pi]$



$a_0 = \frac{\pi^2}{12}$ $a_k = \frac{1}{k^2}$ $b_k = 0$ $k>0$

Donc la série de Fourier cvg unif^t $\frac{1}{k^2}$ $|c| \leq 1$. vers g p/ thme d'avant

D'où $\frac{(\pi-x)^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$x=0$ $\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ $\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \pi^2\left(\frac{3-1}{4\times 3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

05.02.2010

$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ $S_n(x) = D_n(x) * f(x)$

Lemme (Riemann) $a<b$ Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$ (Riemann intégrable)

Alors $\lim_{A\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(Ax)dx = 0 = \lim_{A\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(Ax)dx$

Preuve cas f est en escalier

On décompose $[a,b]$ en un nb fini de segments et on voit q 'il suffit de traiter le cas où f est cste.

Ds ce cas $\int_a^b 1.\cos(Ax)dx = \left[\frac{\sin Ax}{A}\right]_a^b - \frac{1}{A}\int_a^b(\sin Ax)dx = b\frac{\sin Ab}{A} - \frac{\sin Aa}{A} - \frac{1}{A}\int_a^b \sin(Ax)dx \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0$

cas général Soit $\varepsilon>0$, $\exists g$ en escalier tq $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon$

Alors $\int_a^b f(x)\cos(Ax)dx = \underbrace{\int_a^b (f(x)-g(x))\cos(Ax)dx}_{|\ |\leq(b-a)\varepsilon} + \int_a^b g(x)\cos(Ax)dx$ $\rightarrow 0$ car g en escalier

D_n n'a pas les ptés 1) (≥ 0) et 3)

Le lemme de Riemann va remplacer 3)

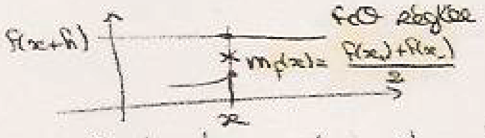
On a 2) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx$ $k\neq 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx = \left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{ik\pi}}{ik} - \frac{e^{-ik\pi}}{ik}$

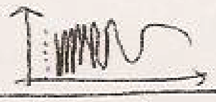
$D_n(x)$ est paire

$$\boxed{D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\pi\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad x\neq 2n\pi}$$ (exercice)

Déf: On note $f(x_+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x+h)$

$f(x_-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(x+h)$





Ces 2 limites st supposées exister en tout point

• On dit que f vérifie une condition de Lipschitz à droite en x
si $\exists\, C>0$ et $\delta>0$ tq $0<h<\delta$ $|f(x+h)-f(x_+)| \le Ch$. (ne gigotte pas trop)
à gauche: $-\delta<h<0$ $|f(x+h)-f(x_-)| \le Ch$

Thme (Dirichlet)**:** Soit f 2π-périodique, continue par morceaux q vérifie une condition de Lipschitz à droite et à gauche en un p^t x donné.
Alors la série de Fourier de f, $S_n(x)$, cvg vers $m_f(x) = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$

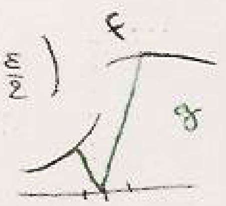
Preuve: Soit $\varepsilon>0$ — Soit $\delta>0$ $\delta<\varepsilon$
But: $|m_f(x) - S_n(x)| \le \varepsilon \times$ cste fixe
$D_n * f(x) - m_f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - m_f(x)] D_n(t)\,dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$

$\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) D_n(t)\,dt = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t)\,dt$ car D_n est paire
donc $\int_{-\delta}^{\delta} [f(x-t) - m_f(x)] D_n(t)\,dt = \int_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - m_f(x)\right] D_n(t)\,dt$
$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\right|$ $\left|\ \right| \le \int_{-\delta}^{\delta} C|t| \frac{1}{|\sin\frac{t}{2}|} \frac{|\sin\frac{(2n+1)t}{2}|}{2\pi}\,dt$
$\le \int_{-\delta}^{\delta} C \frac{|t|}{|\sin\frac{t}{2}|}\frac{dt}{2\pi} \le \frac{2\delta C C_1}{2\pi}$ $\quad C_1 = \sup_{|t|\le\frac{\pi}{2}} \left|\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\right|$ (continue sur intervalle fermé borné)

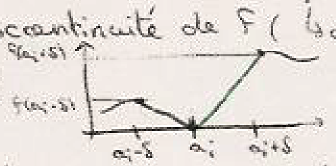
Pr les 2$^{\text{ères}}$ intégrales $\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\right.$ et $\left.\int_{\delta}^{\pi}\right)$
$g(t) = \frac{f(x-t) - m_f(x)}{\sin\frac{t}{2}}$ est continue p^r morceaux s/ $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ (a, b / a, b)
donc le lemme de Riemann ($A = \frac{2n+1}{2}$) dit que $\int_{-\pi}^{-\delta}$ et $\int_{\delta}^{\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Thme. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique / R-intégrable / continue p^r morceaux (bornée)
tq $\hat{f}(n) = 0\ \forall n\in\mathbb{Z}$
Alors $\|f\|_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 0$ (donc f est nulle en tt p^t de continuité)

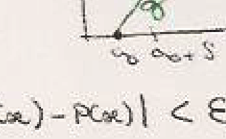
Lemme f / R-intégrable / continue par morceaux sur $[a,b]$.
Soit $\varepsilon>0$, alors $\exists g$ continue sur $[a,b]$ tq $\int_a^b |f-g| < \varepsilon$



Preuve (cas Riemann-intégrable on trouve d'abord $\tilde{f}$ en escalier tq $\int_{-\pi}^{\pi} (f-\tilde{f}) < \frac{\varepsilon}{2}$)
• Soient $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ les discontinuité de f (ou $\tilde{f}$)
• Soit $\delta < \frac{\varepsilon}{2(m+1)\|f\|_0}$ $\quad \|f\|_0 = \sup_{|x|\le\pi} |f(x)|$



g = f hors des 2δ intervalles centrés en a_i. $g(a_i) = 0$ $(g(a) = g(b) = 0)$.
Alors $\int_a^b |f-g| \le \sum_{i=0}^{m} \int_{a_i-\delta}^{a_i+\delta} |f-g| \le 2\delta(m+1)\|f-g\|_0 \le 2\delta(m+1)\|f\|_0 < \varepsilon$



Preuve (thme) Soit g continue tq $\int_{-\pi}^{\pi} |f-g| < \varepsilon$ (lemme)
2π-périodique
Soit P un polynôme trigonométriq tq $\|g - P\|_0 = \sup_{|x|\le\pi} |g(x) - P(x)| < \varepsilon$
$\le \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{f}-\bar{g}) + \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{g}-\bar{P}) + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{P}}_{=0 \text{ p}^r\text{ hypothèse}}$
$\le \|f\|_0 \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}-\bar{g}| + \|\bar{g}-\bar{P}\|_0 \int_{-\pi}^{\pi} |f|$
$= \varepsilon\left(\|f\|_0 + \int_{-\pi}^{\pi} |f|\right).$

Lemme f / Riemann-intégrable continue par morceaux 2π-périodique

Posons $c_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$ et $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ ⚠ Bien symétrique

Soit aussi $T_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} b_n e^{inx}$ un ô poly trigo de deg $\leq N$.

Alors $\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_N|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f-T_N|^2$ avec égalité ssi $c_n = b_n$ $-N \leq n \leq N$

$\int \bar{f}(x) e^{inx} = \overline{\int f(x)e^{-inx}} = \bar{c}_n 2\pi$

Preuve $\int_{-\pi}^{\pi} |f-T_N|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \sum_{-N}^{N} b_n e^{inx}\right)\left(\bar{f}(x) - \sum_{-N}^{N} \bar{b}_n e^{-inx}\right)dx$

$= 2\pi \sum |b_n|^2 - 2\pi \sum b_n \bar{c}_n - 2\pi \sum \bar{b}_n c_n + \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$

Pour $b_n = c_n$ on obtient $\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_N|^2 = -2\pi \sum |c_n|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$ $(*)$

donc $\int_{-\pi}^{\pi} |f-T_N|^2 - \int_{-\pi}^{\pi} |f-S_N|^2 = 2\pi\left(\sum |b_n|^2 - \sum b_n \bar{c}_n - \sum \bar{b}_n c_n + \sum |c_n|^2\right)$

$= 2\pi\left(\sum (b_n - c_n)(\bar{b}_n - \bar{c}_n)\right)$

$= 2\pi\left(\sum |b_n - c_n|^2\right) \geq 0$

$(= 0 \iff b_n = c_n \ -N \leq n \leq N)$.

Cor : $\tilde{M}$ hyp. $\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ (Bessel) $\leftarrow$ par $(*)$

d'où $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ donc $\hat{f}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

aussi ĉ lim $\sum_{-N}^{N}$ somme symétrique

d'où $\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (& Riemann)

$\sin(nx)$

Thme : $\tilde{M}$ hyp.

1) $\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_N|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

2) $2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$ (Parseval) exo 1) $\Leftrightarrow$ 2) ss aucune connaissance

pi calcul abstrait

Preuve Soit $\varepsilon > 0$ et $P(x) = \sum_{-M}^{M} b_n e^{inx}$ poly trigo tq $|P-f| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$

alors $\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_M|^2 \underset{\text{thme précédent}}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi} |f-P|^2 < \varepsilon$

et si $N \geq M$, $\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_N|^2 \underset{\text{thme précédent}}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi} |f-S_M|^2 < \varepsilon$

2) $2\pi \sum_{-M}^{M} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \int_{-\pi}^{\pi} |S_M - f|^2$ $(*)$

$\geq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \varepsilon$ d'apr. 1).

Donc $N \geq M \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \varepsilon \leq 2\pi \sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \overset{\text{Bessel}}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$

Rmq : sur l'espace E des fcts 2π-pér. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue p/ morceaux

on a un produit hermitien $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}$

d'où une semi-norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2}$ $\quad \|\lambda f\|_2 = |\lambda|\,\|f\|_2$

∅ séparée $\quad \|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ (suit inégalité Cauchy Schwarz)

$\|f\| = 0 \Rightarrow f$ est nulle sauf en 1 nb fini de p^t

Soit E_0 le sev de ces fcts là.

Sur E/E_0 $\|\cdot\|$ devient une norme.

la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}$ est orthonormale

Les thmes précédents disent q le poly trigo q' minimise la distance de f à F est $S_N(x) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e^{-inx}$

$F = \{$ polyno trigo de d° $\le N \}$

$E \longrightarrow l^2(\mathbb{C}) = \{ (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \}$

$f \longrightarrow (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}$

$E/E_0 \xrightarrow{\text{injectif}} l^2(\mathbb{C})$

$\|(c_n)\| = \left(\sum |c_n|^2\right)^{1/2}$

$\langle (c_n), (d_n) \rangle = \sum c_n \bar{d_n}$

$\|f\|^2 = \sum |\hat{f}(n)|^2$. la flèche est une isométrie.

m̃ si E est étendu aux fct° Riemann-int, cette flèche n'est pas surjective

Avec Lebesgue, donné $(c_n) \in l^2(\mathbb{C})$, $\exists$ f 2π-pér. Lebesgue-intégrable de carré

tq $\begin{cases} \hat{f}(n) = c_n \\ \|f\|_2 = \sum |c_n|^2 \end{cases}$

cela vient de ce que

$\{$ fct° de carré Leb.-intégrable $\} \supset E$

avec $\|\cdot\|_2$ est complet $\rightarrow$ Espace de Hilbert

12.02.2010

"Plus la fct° f est dérivable 2π-périodique, plus les coeff. de Fourier tendent vers 0 et réciproquement."

$\exists$ serie trigo $\neq$ serie Fourier aucune fct

$\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{\log n}$ cv $\forall x$

p: f continue 2π-périodique primitive de f' continue p/ morceaux

Alors $\sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$ cvg donc $n c_{\pm n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

preuve $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \underbrace{\left[\frac{-1}{2\pi n} f(t) e^{-int} \right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ car } f\ 2\pi\text{-pér.}} + \underbrace{\frac{1}{2i\pi n} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt}_{\frac{1}{in} c_n'}$

$\rightarrow c_n' = in c_n$ Parseval (ou Bessel) sur f' dit q $\sum |c_n'| < \infty$ de $|c_n'| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ i.e. $|nc_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

p/ récurrence: Si f est continue 2π-périodique k fois continûment dérivable

$\sum_{-\infty}^{\infty} |n^k c_n|^2$ cvg et en part, $c_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ $n \longrightarrow \pm\infty$

déf $= \frac{1}{n^k} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ $\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Pas de réciproq à la prop. Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ et $\sum n^2 |c_n|^2$ cvg mais f pas dérivable en 0.

p: Si $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|$ (resp $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n|$) cvg, la suite (c_n) est la suite des coeff. de Fourier d'1 fct° 2π-périodiq continue s/ $\mathbb{R}$ (resp. C^k) et la série de Fourier de f (resp de $f^{(i)}$ $0 \le i \le k$) cvg normalt vers f (resp $f^{(i)}$).

Série de Fourier fait pr: eq° à dérivée partielle eq° corde vibrante...

preuve:

$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ cv normalt ($\|\cdot\|_\infty$ sup fct° de fct° 2π-pér.) donc sa somme f est continue 2π-périodiq

$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} c_k e^{ikt} e^{-int} dt}_{0 \text{ sauf } k=n} = c_n$

Si $\sum_{-\infty}^{\infty} n|c_n|$ cvg alors $\sum |c_n|$ aussi ($|c_n| \le n|c_n|$, $n \neq 0$)

donc $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n in e^{int}$ est continue périodiq et la f précédent vérifie $f(t) - f(0) = \int_0^t g(u) du$

$g(t) = f'(t)$ et on finit p/ 1 récurrence

$\underline{\text{exple}}$ série trigo $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\log n}$ $b = \frac{1}{n \log n}$ n'est la série de Fourier d'aucune fct° $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

2π-périodique intégrable (pr q f)

1) Cette série cvg $\forall x \in \mathbb{R}$ transformat° d'Abel $u_n \geq 0 \to$ critère comparaison version $\sin \to$ série alternée discrète $\sum$ partie) — Riemann Cantor

$$S_k = U_1 + \dots + U_k \qquad S_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (S_i - S_{i-1})$$

transformation d'Abel

$$= \alpha_1(S_1 - S_0) + \alpha_2(S_2 - S_1) + \dots + \alpha_n(S_n - S_{n-1}) = \underbrace{-\alpha_1 S_0}_{\text{vaut zéro}} + (\alpha_1 - \alpha_2)S_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)S_2 + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)S_{n-1} + \alpha_n S_n$$

Si $|S_n|$ est bornée par S et $\alpha_i \searrow$ la série converge

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i\right| \leq S(\alpha_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n S_n$$

$$\leq S(\underbrace{2\alpha_1 - \alpha_n}_{\to 2\alpha_1}) + \alpha_n S \leq C^{te} \qquad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$a_n = \frac{1}{\log n} \searrow 0$ $u_n = \sin xn$

$$|\sin 2x + \dots + \sin nx| = \left|\mathrm{Im}(e^{i2x} + \dots + e^{inx})\right| = \left|\mathrm{Im}\left(e^{i2x} \times \frac{1 - e^{i(n-1)x}}{1 - e^{ix}}\right)\right|$$

$$= \left|\mathrm{Im}\, \frac{e^{2xi}e^{\frac{i(n-1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{-\frac{i(n-1)x}{2}} - e^{\frac{i(n-1)x}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}}\right| = \left|\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{(n+2)x}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}(n-1)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\sin(\frac{n+2}{2}x)\sin(\frac{n-1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$ à x fixé $x \neq 0, \cancel{2\pi}$ 2π-périodiq

mq pr $x = 0$ série cvg évidem^t.

2) Supposons qu'il existe f absolum^t intégrable (vrai intégrale $\neq$ intég impropre graffe)

tq $f \sim \sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\log n} = \sum_{n\geq 2} b_n \sin xn$ — $a_n = 0$ $\forall n$. $\Rightarrow a_0 = 0$

Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ $\quad F(2\pi) = F(0)$ car $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\sin(nt)\,dt \overset{IPP}{=} \left[\frac{1}{\pi} F(t) \frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos nt}{n}\,dt$$

$$= 0 \quad (F \text{ péric}) \qquad + -\frac{a_n}{n} = 0$$

$A_n = \frac{-b_n}{n}$ ($\neq 0$) $n \neq 0$.

F est continue (c primitive de fct° intégrable)

donc $K_n * F \longrightarrow F$ $\quad K_n$ = noyau de Fejer

càd si $S_N(x) = \sum_{n\geq 2}^{N} A_n \cos(nx)$ $\quad \frac{S_2 + \dots + S_N(x)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} F(x)$

en $\underline{x = 0}$. ceci dit $\frac{1}{n-2}\left[A_2 + (A_2 + A_3) + (A_2 + A_3 + A_4) + \dots + (A_2 + \dots + A_n)\right] \xrightarrow[n]{} 0 = F(0)$

$$\| \qquad\qquad \xrightarrow[n]{} 0$$

$$A_2 + \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)A_3 + \left(1 - \frac{2}{n-2}\right)A_4 + \dots + \left(1 - \frac{n-3}{n-2}\right)A_n \longrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{k=3}^{n}\left(1 - \frac{k}{n-2}\right)A_k \longrightarrow A_2$$

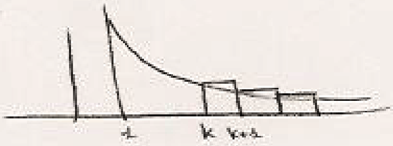
$$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{n}\left(1 - \frac{k}{n-2}\right)\frac{b_k}{k} \longrightarrow A_2$$

on veut en déduire $\sum_{k\geq 2} \frac{b_k}{k}$ cvg

càd $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k \log k}$ cvg^e q est faux

$$A_2 \geq \sum_{k=3}^{2n+2}\left(1 - \frac{k}{2n}\right)\frac{b_k}{k} \overset{\text{termes}\geq 0}{\geq} \sum_{k=3}^{n}\left(1 - \frac{k}{2n}\right)\frac{b_k}{k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{b_k}{k}$$

• Mq $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\log n}$ ne cvg pas



$$\int_3^A \frac{dx}{x\log x} \underset{\substack{x=e^u\\ dx=e^u du}}{=} \int_{\log 3}^{\log A} \frac{e^u du}{e^u} = \log A - \log 3 \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$= \Big[\ln(\ln(x))\Big]_3^A \quad -\ln(\ln 10)$$

Théorie de Riemann

$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ série trigonométriq (pas de Fourier) qcq avec coeff^{ts} bornés

$\exists M$ tq $|c_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{Z}$

• On considère la fc° de Riemann F_S de S
(obtenue en intégrant formellement $\sum c_n e^{inx}$ deux fois)

$$F_S(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} \quad x \in \mathbb{R} \qquad (\textstyle\sum' \text{ veut dire } n=0 \text{ est exclus})$$

$\left|\frac{1}{n^2} c_n e^{inx}\right| \leq \frac{M}{n^2}$ donc on a cvgce normale et
F_S est continue ($\sum$ fc° cont.)
ms pas périodiq ($\frac{c_0 x^2}{2}$).

On ne peut pas espérer $F_S''(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ ($\hat{m}$ si cette somme cvg a 1 sens)
Ms qlqch de proche est vrai

Déf° $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit $\Delta^2 F(x,h) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$ $\quad (F(x+h)-F(x)) + (F(x-h)-F(x))$

et soit $D^2F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 F(x,h)}{h^2}$ si cette limite existe

Deuxième dérivée symétrique / de Schwartz

exo : Si F'' existe als $D^2F(x)$ existe et elles sont égales
La réciproque est fausse

Lemme (Cauchy) $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues dérivables sur $]a,b[$
si 1) $f(a) \neq f(b)$ et 2) $f'(x)$ et $F'(x)$ ne s'annulent pas simultaném^t sur $]a,b[$

als $\frac{Fb - Fa}{fb - fa} = \frac{F'(\xi)}{f'(\xi)}$ pr 1 ξ, $a < \xi < b$ ou $\xi = a + \theta(b-a)$, $0 < \theta < 1$

preuve $g : x \longrightarrow f(x)(Fb - Fa) - F(x)(fb - fa)$

$g(a) = f(a)Fb - Fa f(a) - F(a)f(b) + F(a)f(a) = 0$
$g(b) = f(b)Fb - f(b)Fa - Fb f(b) + F(b)Fa = 0$ $\quad$ g prend les $\hat{m}$ valeurs en a et b

p/ thme de Rolle $\exists \xi$ $a < \xi < b$ $g'(\xi) = 0 = f'(\xi)(Fb - Fa) - F'(\xi)(fb - fa)$

et $f'(\xi) \neq 0$ car $\underset{\text{sinon}}{\overset{1)}{\Rightarrow}}$ $Fb \neq Fa$ $\Rightarrow F'(\xi) = 0$ faux p/ 2) interdit $\square$

$$\frac{\Delta^2 F(x,h)}{h^2} = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$ quotient de 2 fc° de h de $[0,\alpha] \to \mathbb{R}$

$D \Rightarrow f(h) = h^2$ $\quad 2h \neq 0 \quad h \in]0,\alpha[$ $\quad f0 \neq f\alpha$

$$= \frac{F'(x+\theta_\alpha) - F'(x-\theta_\alpha)}{2\theta_\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{F'(x+\theta_\alpha) - F'(x) + (F'(x) - F'(x-\theta_\alpha))}{\theta_\alpha}\right\} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\, 2F''(x)$$

F impaire
F' n'existe pas
mais $\frac{\Delta^2 F(0,h)}{h^2} = 0$

26.02.2010

ex F impaire $F(h)=-F(-h)$ donc $F(0)=0$

$\sum_{x=0}\Delta^2(x,h)=0 \Rightarrow D^2F(0)=0$ $\quad F(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } x>0\\ -\sqrt{-x} & \text{si } x<0\end{cases}$ $F'(0)$ n'existe pas, $F''(0)$ non plus

1^e lemme de Riemann Si $S=\sum c_n e^{inx}$ existe alors $D^2F_S(x)$ existe et vaut S

preuve: on calcule
$$\frac{\Delta^2 F_S(x,2h)}{4h^2} = \frac{c_0(x+2h)^2+c_0(x-2h)^2-2c_0x^2}{2\cdot 4h^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{4h^2}\left(\frac{c_ne^{in(x+2h)}+c_ne^{in(x-2h)}-2c_ne^{inx}}{n^2}\right)$$
(or $[e^{2inh}+e^{-2inh}-2]=2\cos 2nh-2=-4\sin^2 nh$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 c_ne^{inx}$$ (si $n=0$ on pose $\frac{\sin nh}{nh}=1$)

Donc il suffit de prouver

lemme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\to a \Rightarrow \lim_{h\to 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2a_n\right)=a$

(on appliq à $a_n=c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}$ d'où $a_n=(c_n+c_{-n})\cos nx+(c_n-ic_{-n})\sin nx$)

preuve: Soit $A_N=\sum_{n=0}^{N}a_n$ Alors
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-\left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h}\right)^2\right]A_n \qquad a_n=A_n-A_{n-1}$$

Soit $h_k\to 0$ $h_k>0$ ($k\in\mathbb{N}$) et posons $s_{kn}=\left(\frac{\sin(nh_k)}{nh_k}\right)^2-\left(\frac{\sin(n+1)h_k}{(n+1)h_k}\right)^2$

Alors on doit mq $A_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}A_ns_{kn}\xrightarrow[k\to\infty]{}a$

On pense à la matrice infinie (s_{kn}) c à d une méthode de sommation
càd une manière de transformer une suite (x_n) en la suite $(y_k)=(s_{kn})(x_n)$
càd $y_k=\sum s_{kn}x_n$.

$$\begin{array}{cc} & \xrightarrow{n} \\ k\downarrow & \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & \cdots \\ s_{10} & & & \\ s_{20} & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ \vdots\end{pmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}s_{kn}x_n=y_k\end{array}$$

ex: si $s_{kn}=\begin{cases}\frac{1}{k+1} & n\le k\\ 0 & n>k\end{cases}$ $\quad k=0\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots\\ 1/2&1/2&0&\cdots\\ 1/3&1/3&1/3&0\cdots\end{pmatrix}$ et $y_k=\frac{x_0+\cdots+x_k}{k}$ (m̄ de Césaro)

df: Une méthode de sommation est régulière si $x_n\xrightarrow{n}x \Rightarrow y_k\xrightarrow{k}x$

Lemme (Toeplitz) a) si la matrice (s_{kn}) vérifie
1) $s_{kn}\xrightarrow{k}0$ $\forall n\in\mathbb{N}$
2) $\sum_{n=0}^{\infty}|s_{kn}|\le C<\infty$ $\forall k\in\mathbb{N}$ $\qquad$ alors (s_{kn}) est régulière
3) $\sum_{n=0}^{\infty}s_{kn}\xrightarrow{k}1$

b) Si (s_{kn}) vérifie 1) et 2) et $x_n\to 0$ alors $y_k\to 0$.

Donc il suffit (pr cal le 1^e lemme de Riemann) de vérifier 1), 2), 3) pour $s_{kn}=\left(\frac{\sin nh_k}{nh_k}\right)^2-\left(\frac{\sin(n+1)h_k}{(n+1)h_k}\right)^2$

1) n fixé $k\to\infty$ $h_k\to 0$ $s_{kn}\to 1-1=0$

3) $\sum_{n=0}^{N}s_{kn}=1-\left(\frac{\sin(N+1)h_k}{(N+1)h_k}\right)^2\xrightarrow[N\to\infty]{}1$

Pour 2): Posons $u(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

exo $\int_0^{\infty}|u'(x)|dx<\infty$ Alors $\sum_{n=0}^{\infty}|s_{kn}|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{nh_k}^{(n+1)h_k}u'(x)dx\right|\le\int_0^{\infty}u'(x)dx<\infty$

Exercice $u(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ $\quad u'(x)=2\,\frac{\sin x}{x}\,\frac{(\cos x)x-\sin x}{x^2}$

$|u'(x)|\leq 2\,\frac{x+1}{x^3}\underset{x\geq 1}{\leq} 2\,\frac{2x}{x^3}=\frac{4}{x^2}\to$ cvg à l'∞

près de 0 $u'(x)=2\frac{(x-x^2\alpha)}{x}\;\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\beta\right)x-(x-x^2\alpha)}{x^2}$ $\quad \alpha,\beta\xrightarrow[x\to 0]{}0$ petit eau

$=2(1-x\alpha)\left(\frac{-\frac{x^3}{2}+x^3\beta-x^2\alpha}{x^2}\right)=2(1-x\alpha)\left(-\frac{x}{2}+x\beta-\alpha\right)=\pm\,\varepsilon(x)$ $\quad \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$

preuve lemme de Toeplitz

preuve b) Soit $\varepsilon>0$

$|y_k|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}s_{kn}x_n\right|\leq\sum_{n=0}^{N}|s_{kn}||x_n|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|s_{kn}||x_n|$ $\quad$ Soit $M=\sup|x_n|$ existe car (x_n) cvg $\to$ bornée

$\exists N>0$ tq $|x_n|<\varepsilon$ si $n\geq N$ et mnt $\exists K$ tq $k\geq K$ $\quad |s_{kn}|\leq\frac{\varepsilon}{N}$ par 1) pr $n=0,1,\dots,N$.

d'où $|y_k|\leq M\,\frac{\varepsilon}{N+1}(N+1)+\varepsilon C=\varepsilon(C+M)$ si $k\geq K$.

preuve a) $x_n\to x$ Mq $y_k\to x$

$$|y_k-x|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}s_{kn}x_n-\sum_{n=0}^{\infty}s_{kn}x+\sum_{n=0}^{\infty}(s_{kn}x)-x\right|$$

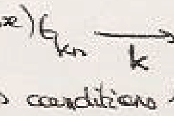
$$\leq\Big|\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}s_{kn}(x_n-x)}_{\substack{k\to\infty \\ \to 0 \text{ p b)}}}\Big|+|x|\,\Big|\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}s_{kn}-1}_{\substack{k\to\infty \\ \to 0 \text{ par 3)}}}\Big|$$

2nd lemme de Riemann $\quad S\sim\sum c_ne^{inx}$ avec $c_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ donc borné

alors $\frac{\Delta^2F_S(x,h)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}0$ uniformément en x.

Rmq: cela implique que le graphe de F_S n'a pas de coin
(càd si les dérivées à droite et à gauche en x existent, elles sont égales).

$h\to 0$, $h>0$ $\quad \underbrace{\frac{\Delta^2F_S(x,h)}{h}}_{\to 0}=\underbrace{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ \text{dérivée à} \\ \text{droite en } x}}-\underbrace{\frac{F(x)-F(x-h)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ \text{dérivée à gauche} \\ \text{en } x}}$



: à exclure

preuve on calcule encore $\frac{\Delta^2F_S(x,2h)}{4h}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sin nh)^2}{n^2h}c_ne^{inx}$ $\quad$ $\left(\left(\frac{\sin nh}{n^2h}\right)^2\right.$ est remplacé par h si $\left.n=0\right)$

Soit $0<h_k\leq 1$, $h_k\to 0$ et $t_{kn}=\frac{\sin^2(nh_k)}{n^2h_k}$ $\quad$ on doit mq $\sum_n(c_ne^{inx})t_{kn}\xrightarrow[k]{}0$ unif en x

puisq $c_ne^{inx}\to 0$ unif en x il suffit de vérifier les conditions 1 2 de Toeplitz pr (t_{kn})

pour 1) $t_{kn}=\frac{\sin^2(nh_k)}{n^2h_k}\leq\frac{n^2h_k^2}{n^2h_k}=h_k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ $\quad$ (n fixé)

pour 2) on fixe k et on choisit $N>1$ tq $\quad N-1\leq\frac{1}{h_k}<N$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_{kn}|=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\sin^2(nh_k)}{n^2h_k}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\sin^2nh_k}{n^2h_k}\leq(N-1)h_k+\frac{1}{h_k}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1+\frac{1}{h_k}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} \qquad \frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\leq 1+\frac{1}{h_k}\times\frac{1}{N-1}\leq 1+\frac{N}{N-1}\leq 1+2=3\ \square$$

Lemme (Cantor) Si $a_n\cos nx + b_n \sin nx \longrightarrow 0$ pour $x\in E$ avec $\mathrm{Leb}(E)>0$ alors $a_n, b_n \to 0$

Preuve: on peut supposer $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ (sinon $\mathrm{Im}(a_n), \mathrm{Re}(b_n) \to 0$)

Soit $\rho_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ et soit φ_n tq $\begin{cases} \rho_n \cos\varphi_n = a_n \\ \rho_n \sin\varphi_n = b_n \end{cases}$

d'où $a_n\cos nx + b_n \sin nx = \rho_n \cos(nx-\varphi_n)$ donc $\rho_n \cos(nx-\varphi_n) \to 0$ si $x\in E$. on veut mq $\rho_n \to 0$.

Supposons $\rho_n \not\to 0$ $\exists \varepsilon>0$ et $n_1<n_2<\dots$ tq $\rho_{n_k}\geq\varepsilon$ donc $\cos(n_k x-\varphi_{n_k}) \underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow 2\cos^2(n_k x-\varphi_{n_k}) \to 0$

$\quad \| \quad |1+\cos(2(n_k x - \varphi_{n_k}))| \longrightarrow 0$

$c_n = \hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t) e^{-int}\,dt$

(preuve Lebesgue) par cvgce dominée $\int_E (1+\cos(2(n_k x-\varphi_{n_k})))\,dx \to 0$

Donc si χ_E est la fc° caractéristiq de E (étendue p/ 2π-périodicité à $\mathbb{R}$)

on a $\mathrm{Leb}(E) + \int_0^{2\pi} \chi_E(x)\cos(2(n_k x-\varphi_{n_k}))\,dx \to 0$

$= \mathrm{Leb}(E) + 2\pi\,[\,\mathrm{Re}(\underbrace{\hat{\chi}_E(-2n_k)}_{\to 0})\cos\varphi_{n_k} - \mathrm{Im}\,\underbrace{\hat{\chi}_E(-2n_k)}_{\text{lemme de Riemann } n_k\to\infty}\sin\varphi_{n_k}\,] \longrightarrow \mathrm{Leb}(E)$ $\Big\}\to \mathrm{Leb}(E)=0$

(preuve Cantor, E intervalle), non dégénéré

- $\forall p\in\mathbb{N}$ $\exists n>p$ et $\exists E'$ intervalle $\subset E$ tq $|\rho_n\cos(nx-\varphi_n)|>\frac{\varepsilon}{2}$. si $n_k>p$ et $n_k > \frac{\pi}{\delta = \mathrm{long}(E)}$ où $\delta = \mathrm{Leb}(E)$

alors E contient un point x où $|\cos(n_k x-\varphi_{n_k})| = 1$

donc un intervalle E' fermé sur lequel $|\cos(n_k x - \varphi_{n_k})| > \frac{1}{2}$ (longueur>0) continuité de $x\to\cos(n_k x-\varphi_{n_k})$

- On construit ainsi $n_{k_1}<n_{k_2}<\dots$ et $E'\supset E''\supset E'''$ tq $|\rho_{n_{k_i}}\cos(n_{k_i}x-\varphi_{n_{k_i}})| > \frac{\varepsilon}{2}$ sur $E^{(i)}$

suite d'intervalles $\neq\emptyset$ emboîtés

- Si $x\in \bigcap E^{(i)}$ $\neq\emptyset$, $|a_{n_{k_i}}\cos n_{k_i}x + b_{n_{k_i}}\sin n_{k_i}x| > \frac{\varepsilon}{2}$ càd $a_n\cos nx + b_n\sin nx \not\to 0$

$K_0\supset K_1\supset\dots$ des compacts non vides alors $\bigcap K_i \neq\emptyset$

preuve: sinon $U_i = K_0\setminus K_i$ $\quad \bigcup U_i = K_0\setminus \bigcap K_i = K_0$ compact $\Rightarrow$

$K_0 = U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_p} = U_{i_p} = K_0\setminus K_{i_p} \Rightarrow K_{i_p}=\emptyset$ absurde.

Lemme (Schwartz) $F:]a,b[\to\mathbb{R}$ continue tq $D^2F(x)\geq 0$ $\forall x\in]a,b[$.

(on ne sait pas si F' existe)

Alors F est convexe sur $]a,b[$

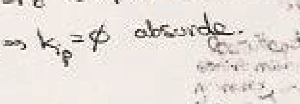
En particulier si $F:]a,b[\to\mathbb{C}$ est continue et $D^2F(x)=0$ $\forall x\in]a,b[$ alors F est linéaire sur $]a,b[$.

Preuve · Rappel F convexe si le gr^{he} F est sous toutes ses cordes:

$a<x<y<b \Rightarrow F(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ $0\leq\lambda\leq 1$.

· en remplaçant F par $F+\varepsilon x^2$ puis en faisant tendre $\varepsilon\to 0$.

On peut supposer $D^2F(x)>0$ $\forall x\in]a,b[$.



· Si F n'est pas convexe $\exists$ fc° linéaire $\mu x+\nu$ et $a<c<d<b$ tq

si $G(x) = F(x) - (\mu x+\nu)$, $G(c)=0=G(d)$ et $G(x)>0$ pour $x\in[c,d]$

Soit x_0 un p^t où G atteint son max s/ $[c,d]$ $\quad c<x_0<d$ et $G(x_0)>0$.

$D^2G(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta^2 G(x_0,h)}{h^2}$ $\quad \Delta^2 G(x_0,h) = \underbrace{G(x_0+h) - G(x_0)}_{\leq 0} + \underbrace{G(x_0-h) - G(x_0)}_{\leq 0} \leq 0$.

≤ 0 contradiction car $D^2G(x_0) = D^2F(x_0) > 0$. $\quad$ G maximum

· (en particulier) on se ramène à valeurs ds $\mathbb{R}$ (Im, Re) Si F et $-F$ sont convexes F linéaire sur tout $[c,d]\subset]a,b[$ donc sur $]a,b[$.

Thm (Cantor 1870) Si $\sum c_n e^{inx} = 0$ $\forall x\in[0,2\pi]$. alors $c_n = 0$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

preuve: Notons $S\sim\sum c_n e^{inx}$ lemme de Cantor $c_n \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc c_n borné

$F_S(x) = c_0\frac{x^2}{2} - \sum{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx}$ (2ème lemme de Riemann) $D^2F_S(x) = 0$

et donc (lemme Schwartz) F_S est linéaire. on conclut avec

Lemme Si F_S est linéaire, $c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$

preuve: $c_0 \frac{x^2}{2} - \sum' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} = ax + b \quad 0 \le x \le 2\pi$

$x = \pi$ et $x = -\pi$ et soustraction $\Rightarrow 2\pi a = 0 \rightarrow a = 0$

$x = 0$, $x = 2\pi$ et soustraction $\rightarrow 4\pi^2 c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$.

donc $\sum' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} = -b$ cette série cvg unifort

$\Rightarrow k \neq 0 \quad 0 = \int_0^{2\pi} -b e^{ikx} dx = \sum' \frac{c_n}{n^2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = \frac{2\pi c_k}{k^2} \Rightarrow c_k = 0.$

$\sum u_n < \infty \Rightarrow u_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$

Rmq (Kronecker): On peut se passer d'utiliser $c_n \rightarrow 0$ ds la preuve précédente càd

si on peut montrer (1) $\left.\begin{array}{l}\sum c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{et } c_n \rightarrow 0\end{array}\right\} \Rightarrow c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$

$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$

alors on a (2) $\sum d_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow d_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$

preuve: Soit $\sum c_n e^{inx}$ tq $\sum c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (sans hyp. sur c_n)

on fait $x \rightsquigarrow x+u$, $x \rightsquigarrow x-u$ puis la demi-somme, on trouve

$\sum c_n e^{inx} \cos nu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall u \Leftrightarrow c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin xn) \cos nu = 0 \quad \forall x, u \in \mathbb{R}$

et $\rightarrow c_0 = 0 \rightarrow a_0 = 0$ ($b_0 = 0$ tjs)

A x fixé, c' $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ on a $a_n \cos nx + b_n \sin xn \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

série trigo en u

donc par (1) $\begin{cases} a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ c_0 = 0. \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow a_n = 0 \\ x = \frac{\pi}{2n} \rightarrow b_n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow c_n = 0.$

$\sum c_n e^{inx} \overset{\text{def}}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} = \lim_N c_0 + \sum_1^N \underbrace{(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})}_{= a_n \cos nx + b_n \sin nx}$

Rme (Cantor 1871) $\sum c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in [0, 2\pi[$ sauf un nb fini de pt x alors $c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$

preuve: $S \sim \sum c_n e^{inx} \quad x_0 = 0 \le x_1 < x_2 \ldots < x_n < 2\pi = x_{n+1}$ tq si $x \neq x_i$ $\sum c_n e^{inx} = 0$.

P/ le lemme de Schwartz, F_S est linéaire s/ chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$
P/ le 2nd lemme de Riemann, le graphe de F_S n'a pas de coin.
} Donc F_S est linéaire ds $[0, 2\pi[$.

Cela est vrai s/ tout intervalle de longueur 2π (F_S non 2π périodique $\ni c_0 \frac{x^2}{2}$) donc F_S est linéaire.
et c' précédt $c_n = 0 \ \forall n$.

Df.: $E \subset [0, 2\pi[$. E est un ens. d'unicité si tte série trigo q' cvg vers 0 hors de E
(càd $\sum c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \notin E$) est identiqt nulle ($\Leftrightarrow c_n = 0 \ \forall n$)
Sinon c'est un ens. de multiplicité.

$\mathcal{U}$ = classe des ens. d'unicité
$\mathcal{M}$ = classe des ens. de multiplicité

On a vu, $\emptyset$ et tout ens. fini sont ds $\mathcal{U}$.

But (Cantor - Lebesgue) Tout fermé dénombrable est dans $\mathcal{U}$.

Def.: E fermé $\subset [0, 2\pi[$, $E' = \{x \in E \mid x$ est un pt d'accumulation de $E\}$
(dérivé de E)

$\Leftrightarrow$ tt vois. de x contient une ∞ de pts de E $\ne$ un pt $\neq$ de x.

$\Leftrightarrow \exists x_n \in E^{\mathbb{N}} \ x_n \neq x \ x_n \rightarrow x$.

ex - E fini $E' = \emptyset$
- $E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \quad E' = \{0\}$

Comme E est fermé $\underline{E' \subset E}$ $\xrightarrow{x \in ?}$ $\lim x_n = x$ et $x_n \neq x$

$\underline{E' \text{ est fermé}}$ $x'_n \in E'$ $x'_n \to x$ a-t-on $x \in E'$? i.e x limite de p^t de E.

on continue

$x'_n = \lim_k e_{n,k}$ $e_{n,k} \in E$, $\neq x'_n$

$x'_n \xrightarrow[n]{} x$, $\uparrow k$ $e_{n,k}$

Soit $\varepsilon > 0$ $\underline{\exists N}$ tq $n \geq N \Rightarrow d(x, x'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

fixons $\underline{n \geq N}$ - $\underline{\exists k}$ tq $d(x'_n, e_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ et alors $d(x, e_{n,k}) < \varepsilon$

on note $E'' = (E')'$ et $E^{(n)} = (E^{(n-1)})'$.

$\underline{\text{Lemme}}$: E fermé $\Rightarrow$ $E \setminus E'$ est au plus dénombrable

$\underline{\text{preuve}}$: Soit $U_n^{(n \in \mathbb{N})}$ une énumération des $\underline{\text{intervalles}}$ de longueur $\frac{2}{m}$ $m \in \mathbb{N}^*$ centré en un rationnel de $[0, 2\pi]$

Si $x \in E \setminus E'$, $\exists$ Vois de x V tq $V \cap E = \{x\}$ $= p^t$ isolé $\neq$ limd'1 p^t de E.

rationnel, x, U_n, V

donc $\exists n$ tq $E \cap U_n = \{x\}$ $\subset \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi]$

càd $E \setminus E' = \bigcup\{E \cap U_n \mid E \cap U_n = \text{singleton}\}$ qui est au plus dénombrable. car U_n dénombrable

$\supseteq$ p^t pas lim

$\underline{\text{Déf.}}$: E fermé, $E' = \{p^t \text{ d'accumulations de } E\} \subset E$ lim de p^t de E'

E est $\underline{\text{parfait}}$ si $E' = E$ (càd E est sans point isolé)

$\underline{\text{Thme}}$ ($\underline{\text{Cantor - Bendixon}}$) E fermé. Alors $E = P \cup C$ avec $P \cap C = \emptyset$, P parfait, C (au plus) dénombrable!.

$\underline{\text{Déf.}}$: $x \in E$ est un point de $\underline{\text{condensation}}$ si tout voisinage de x contient un ensemble $\underline{\text{non dénombrable de}}$ points de E.

cas d'accumulation

Soit E^c l'ens. des p^t de condensation de E.

$E^c \subset E'$ et E^c est fermé ($e_\infty = \lim e_n$, $e_n \in E^c$)

$\underline{\text{preuve (Thme)}}$: • $E \setminus E^c$ est au plus dénombrable $E^c P$

- U_n une numérotation des intervalles ouverts de centre un rationnel et de longueur $\frac{2}{k}$ ($k > 0$)

Si $x \in E \setminus E^c$ $\exists n$ tq $x \in U_n$ et $U_n \cap E$ au plus dénombrable

donc $E \setminus E^c = \bigcup_{\substack{n \text{ tq} \\ E \cap U_n \text{ au plus dénombrable}}} (E \cap U_n)$ donc est au plus dénombrable.

• $E = E^c \cup (E \setminus E^c) \Rightarrow E^c = (E^{cc} \cup \emptyset) \not\subset (E^c)' \subset E^c$ donc E^c est parfait

car E^c fermé $E^c \subseteq (E^c)'$

$\underline{\text{exo}}$: 1) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

2) E fermé $\Rightarrow$ $\exists$ une unique décomposition $E = P \cup C$, $P \cap C = \emptyset$, P parfait, C au plus dénombrable.

1). $A \subset A \cup B$ $\xRightarrow{\text{ens.}}$ $A^c \subset (A \cup B)^c$ de m̃ pr B, $\Rightarrow$ $A^c \cup B^c \subset (A \cup B)^c$

• contient infinité de p^t de $A \cup B$ non dénombrable $\Rightarrow$ $x \in A^c$ ou B^c sinon $A \cup B$ dénombrable)

$x \in (A \cup B)^c$

2) $\underline{\text{Tout ens. parfait } P \ (P = P') \text{ est non dénombrable}}$. (Baire ds les em complet) $\bigcap O_n$ ouvert dense dense

P est métrique ($\subset \mathbb{R}$) complet (car fermé ds $\mathbb{R}$ complet) donc t_0 la $p^{té}$ de Baire càd tte intersection dénombrable d'ouverts denses est dense)

• Supposons P dénombrable, $P = \{x_n\}_{n \geq 0}$ $O_n = P \setminus \{x_n\}$ ouvert, dense car $x_n \in P \overset{P \text{ parfait}}{=} P'$

Baire: $\bigcap_{n \geq 0} O_n$ est dense $= P \setminus \bigcup_{n \geq 0}\{x_n\} = \emptyset$ } contradiction

• Si P fini, $P' = \emptyset \Rightarrow P = \emptyset$.

Parfait + fini = vide

$\cdot E^c = (P \cup C)^c = P^c \cup \overset{\emptyset}{C^c} = P^c \subset P' = P$

Séries 8

• Tout point de P est de condensation.

~~[$p\in P$]~~ a b $P\cap[a,b]$ fermé ($\hat{=}$ $\cap$ de 2 fermés)

vois. d'qcq — montre fam. de p^t non dénombrable

$(P\cap[a,b])' \supset P\cap]a,b[$ $\ni x$ → $\overset{\in P}{x}$ lim de p^t de $P (=P')$ car → p^t de P à partir d'un certain rg dans $]a,b[$ → x lim de p^t de $P\cap]a,b[$ → $x\in(P\cap[a,b])'$.

— si non dénombrable ok

— sinon bouge a,b tq $]a,b[$ $a,b\notin P$ → $P\cap[a,b]$ parfait → non dénombrable → $\cancel{X}$. dénombrable

→ $P = E^c$ et fini.

Thme (Cantor) E fermé tq ($\subset[0,2\pi]$)

• $\exists n$ avec $E^{(n)}=\phi$ alo E est un ens. d'unicité

• $E^\infty = \bigcap_{n\geq 0} E^{(n)} = \phi$ alo E est un ens. d'unicité

$\forall n\ E^{(n)}\neq\phi$

preuve: • $S\sim\sum c_n e^{inx}$ tq $\sum c_n e^{inx}$ si $x\notin E$

"Tiens je l'avais presque oublié, lui"...

E ens. d'unicité $\Leftrightarrow$ $E+\alpha \bmod 2\pi$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) est ens. d'unicité

$(\sum c_n e^{in(x+\alpha)} = \sum c_n e^{inx}e^{in\alpha})$

Donc on peut supposer $0\notin E$ et $E\subset]0,2\pi[$.

Le complément de E ds $]0,2\pi[$ est un ouvert donc une union disjointe d'intervalles ouverts d'extrémités dans $E\cup\{0,2\pi\}$

~ On va montrer p/ récurrence sur k que F_S est linéaire s/ chaq intervalle contigus à $E^{(k)}$.

Ceci admit, $\hat{=}$ $E^{(n)}=\phi$, F_S est linéaire s/ $]0,2\pi[$ et $\hat{=}$ déjà vu, on en déduit $c_n=0\ \forall n$.

$k=0$: $D^2F_S(x)=0$ hors de E et donc F_S est linéaire sur chaq intervalle contigu à $E=E^{(0)}$.

$k\Rightarrow(k+1)$: Supposons F_S linéaire s/ chaq intervalle contigu à $E^{(k)}$ et soit $]a,b[$ un intervalle contigu à $E^{(k+1)}$

Ds chaq sous-intervalle fermé $[c,d]\subset]a,b[$

Il n'y a q'1 nb fini $c\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq d$ de p^t de $E^{(k)}$ (si $n=0$ ok c'est fini).

Donc $]c,x_0[,]x_0,x_1[, \dots,]x_n,d[$ sont contenus ds des intervalles contigus à $E^{(k)}$ ds F_S (p/H_k) est linéaire s/ chacun d'entre eux. donc (2e lemme de Riemann pas de coins ds le graphe de F_S) F_S est linéaire s/ $[c,d]$. donc s/ $]a,b[$

• $n=\infty$: Soit ~~$]a,b[$ contigu à~~ $[c,d]$ compact $\subset]0,2\pi[=]0,2\pi[\setminus(\underbrace{\cap E^{(n)}}_{=\phi}) = \underbrace{\bigcup_n(]0,2\pi[\setminus E^{(n)})}_{\text{ouvert}}$

donc $[c,d]\subset\left(\bigcup_{n=n_1,n_2,\dots,n_k}(]0,2\pi[\setminus E^{(n)})\right)\subset]0,2\pi[\setminus E^{(m)}$ où $m\geq n_1,n_2,\dots,n_k$.

donc (p/ 1er p^t•) F_S est $\underline{\text{linéaire sur } [c,d]}$ donc F_S est linéaire sur $]0,2\pi[$.

• $E^{(\infty)}\supset E^{(\infty)+1}\supset E^{(\infty+2)}\supset\dots\supset\bigcap_n E^{\infty+n} = E^{(\infty+\infty)}$.

Rcp: $E\subset[0,2\pi[$ ens. d'unicité alo Leb$(E)=0$.

Lemme (principe de localisation pr les séries de Fourier).

f intégrable sur $[0,2\pi]$, 2π-périodique. Si f est nulle sur un intervalle ouvert I alo la série de Fourier f, $\sum\hat{f}(n)e^{inx}$ cvg vers 0 si $x\in I$.

preuve: Soit $S_N(f,x) = \sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx} = \sum_{-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx}$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\left(\sum_{-N}^{N}e^{in(x-t)}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)D_N(x-t)dt = f*D_N(x)$

où $D_N(u) = \sum_{-N}^{N}e^{inu} = \frac{\sin((N+\frac12)u)}{\sin(\frac u2)}$ est le noyau de Dirichlet $= \cos Nu + \cotan\frac u2 \sin Nu$

donc $S_N(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos Nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cotan\left(\frac t2\right)\sin Nt\,dt$

Si f est nulle près de 0, $f(t)\,\mathrm{cotan}\frac{t}{2}$ est intégrable et p/ Riemann $S_N(f,0) \to 0$

Donc si $0 \in I$ c'est gagné
sinon, on translate (f remplacée par $g(x) = f(x - x_0)$) où $x_0 \in I$.

Preuve: Supposons $Leb(E) > 0$. Alors $\exists F$ fermé $\subset E$ avec $Leb(F) > 0$
p/ le lemme $S(\chi_F)$ cvg vers 0. sur tout intervalle ouvert disjoint de F.
ĉ F est un ens. d'unicité, $\hat{\chi}_F(n) = 0$ $\forall n$. $\hat{\chi}_F = \{c_n(\chi_F)\} =$
Ms $\hat{\chi}_F(0) = Leb(F) > 0$. donc contradiction $(0>0)$.

ens bien ordonné

3 Bool

- ordre $\leq$: réflexive, transitive, antisymétrique
- ordre total (= linéaire ou simple) si $\forall x, y \in X$ $x \leq y$ ou $y \leq x$
- X avec un ordre total = chaîne

$\to (X, \leq) \cong \{$famille de parties de X, $\subseteq\}$
bijection q préserve l'ordre
$\varphi : x \longrightarrow S_x = \{y \in X \,/\, y \leq x\}$ $\quad x < x' \Rightarrow S_x \subseteq S_{x'}$
-injectivité $\varphi(x) = \varphi(x')$
$S_x = S_{x'}$
$x' \leq x \quad x \leq x'$
$x = x'$

Rmq: $(\mathcal{P}(X), \subset)$ est "spécial" il a un + petit élément $\emptyset$
——— gd ——— X.

Déf.: X un ens. Un **bon ordre** est une relation d'ordre $\leq$ tq tout ss-ens non vide de X a un + petit élt.

bon ordre $\Downarrow$ ordre total

Rmq.: Alors $\leq$ est un ordre total: $\{x, y\} \subset X$ a 1 plus petit élt p/ exple x, $x \leq y$

Rmq.: Un ens. bien ordonné peut s'écrire peut "s'énumérer".
x_0 = le + petit, x_1 = le + petit de $X \setminus \{x_0\}, \dots$

exples d'ordres totaux ou bons

— X ens. fini, ts les ordres totaux st isomorph.
càd 1 seule classe d'équivalence d'ens bien ordonné modulo bijection préservant l'ordre $\left(\begin{array}{l} x_0 < x_1 < \dots < x_n \\ y_0 < y_1 < \dots < y_n \end{array}\right) \to \varphi(x_i) = y_i$. fini + total $\Rightarrow$ bon

$n \longleftrightarrow$ classe d'équivalence de $\{1, \dots, n\}$.

— ω = classe de $(\mathbb{N}, \leq)$
autres ordres sur $\mathbb{N}$ $*$ $(\dots 3, 2, 1, 0)$ pas isomorph à ω. ← total, pas bon
(sinon $\exists k$ $\varphi(k) = 0 \Rightarrow \varphi(k+1) > 0$ impossible).
$*$ $(1, 3, 5, \dots, 0, 2, 4 \dots)$ bon, pas isomorph à ω.
$\varphi \uparrow (\mathbb{N}, \leq)$ $\uparrow k$ $\varphi(k) = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\infty \text{ d'élt} \leq \varphi(k) \\ k \text{ élt} \leq k.\end{array}\right\}$ absurde.

$\times 0$ $\left\{\begin{array}{l} * \ (\dots 4, 2, 0, \ \dots 5, 3, 1) \\ * \ (1, 3, 5, \dots \ 4, 2, 0) \\ * \ (\dots 5, 3, 1, 0, 2, 4, \dots) \end{array}\right\}$ pas bon, totaux, pas isomorph à ω. $\{$paires$\} = \{(\dots 4, 2, 0)\}$
$*$ $(0, 3, 6, 9, \dots, 1, 4, 7, 10, \dots, 2, 5, 8, \dots)$ bon

Rmq. $\mathbb{N}$ est "spécial".
— ss + gd élt
— $\forall$ élt $\neq 0$ a 1 prédécesseur

• $\mathbb{Q}$ $\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots\right)$ bon ordre

bon ordre : tte partie non vide contient des fract° avec le + petit dénominateur et parmi celles-ci une avec un + petit numérateur

Déf. : X bien ordonné

$S \subset X$ est un segment initial si $\left.\begin{array}{l} x, y \in X \\ y \in S \\ \text{et } x \leq y \end{array}\right\} \Rightarrow x \in S$

Notation : $S_x = \{y \in S \mid y < x\}$ = segment initial

Rmq : Un segment initial S, est soit X soit S_x pr un $x \in X$ (prendre x = plus petit élt de $X \setminus S$).

$y, z \in S$, $y \in S_x$, $z \in S_x$, $z \leq y \rightarrow y \leq x \Rightarrow z \leq x$

Prop : $(X, \leq)$ bien ordonné, $f : X \to X$ $\nearrow$.

Alors $\forall x \in X$ $f(x) \geq x$

preuve : Si $A = \{x \mid f(x) < x\} \neq \emptyset$. soit x_0 le + petit élt de A.

on a $f(x_0) < x_0$ d'où $f(f(x_0)) < f(x_0)$ (f préserve l'ordre) $\Rightarrow f(x_0) \in A$

ms + grand q le + petit élt $x_0 \leq f(x_0)$ ↯

Prop 8 : $(X, \leq)$ bien ordonné, $\omega \subset X$ un segmt initial

et $f : \cancel{X} \to \cancel{\omega}$ un isomorp (biject° q préserve l'ordre)

alors $\omega = X$

et $\forall x \in X$ $f(x) = x$

Cqce : Donc si 2 segmt initiaux de X sont isomorp alors ils st égaux. $\omega \simeq \omega' \subset X \Rightarrow \omega = \omega'$

(S_x et $S_{x'}$ pl exple $x \leq x'$ et alors $S_x \subset S_{x'}$)

preuve (prop.) ~~$\forall x \in X$~~

• $\omega = X$, $x \in X \Rightarrow f(x) \in \omega$ et $x \leq f(x)$ (prop. précédente) $\Rightarrow x \in \omega$ (segt initial)

$X \subset \omega \Rightarrow \omega = X$ on avait $\omega \subset X$

• Donc f^{-1} isomorp de $(X, \leq) \to (X, \leq)$

Donc $f^{-1}(x) \geq x \Rightarrow x \geq f(x)$ car $f(x) \geq x$ $\Rightarrow x = f(x)$

Notation : • X, X' bien ordonnés. On note $X \leq X'$ si X est isomorp à un segt initial de X' et $X \sim X'$ si isomorp.

• $X < X' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X \leq X' \\ X \not\sim X' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X \text{ isomorp à 1 segmt} \\ \text{initial strict de } X'. \end{array}\right.$

isomor(segt init) = segt initial

La prop dit q • $X \sim X' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X \leq X' \\ X' \leq X \end{array}\right.$ prop 8

• on a au + une des 3 assert° $X < X'$, $X' < X$, $X \sim X'$.

Thme X, Y bien ordonnés. Alors 1 et 1 seule des assert° suivantes est vraie

a) $X < Y$

b) $Y < X$

c) $X \sim Y$.

preuve : Soit $\tilde{X}$ = l'ens. des seg^t initiaux$_{ou \emptyset}$ ordonné p/ inclusions.

c'est 1 ens. bien ordonné : $\{S_x\}_{x \in A \subset X}$

X (bien ordonné) $\exists x_0$ = le + petit él^t de A $\longrightarrow$ S_{x_0} est le + petit él^t de $\{S_x\}$

- Si $\forall S \in \tilde{X}$ isomorp^e à 1 segment initial de Y c'est vrai p^r X $\to$ $X \leq Y$.
- Sinon soit S le + petit él^t de $\tilde{X}$ q' ne soit pas isomorp^e à 1 segment initial de Y.

si $\exists x \in S$ tq S_x soit isomorp^e à Y.

als $Y \leq X$

Sinon $\forall x \in S$, on a une injectio croissante $f_x : S_x \to Y$ d'image 1 seg^t initial.

observatio : si $x < x' \in S$ et $f_x, f_{x'}$ des isomorp^e

de S_x ou $S_{x'}$ vers 1 seg^t initial de Y.

als $f_{x'} \circ f_x^{-1}(f_x(S_x)) = f_{x'}(S_x)$ et $f_{x'} \circ f_x^{-1}$ est 1 isomorp^e ε 2 seg^t initiaux de Y

d'où $\forall y \in f_x(S_x) = f_{x'}(S_x)$ $f_{x'} \circ f_x^{-1}(y) = y$.

* Si S n'a pas de + gd él^t als $S = \bigcup_{x \in S} S_x$

et l'observatio fournit $f : S \to Y$ st^t $\nearrow$, d'image $\bigcup_{x \in S} f_x S_x$

[$f(z) = f_x(z)$ dès q $z \in S_x$] cette image est 1 union de seg^t initiaux donc 1 seg^t initial de X.

* Si S a 1 + gd él^t x_0, on construit f de $S \setminus \{x_0\}$ vers 1 seg^t initial S_{y_0} de Y q l'on prolonge p/ $f(x_0) = y_0$ à $S_{y_0} \cup \{y_0\}$ q' est encore 1 seg^t initial.

Cor : $\leq$ est un ordre total s/ tte famille d'ens. bien ordonnées

en fait, c'est un bon ordre.

Th : $\mathcal{W} = \{ \omega_i, \ i \in I_{qq} \}$ famille d'ens bien ordonnés

Als $\exists \omega \in \mathcal{W}$ tq $\omega \leq \omega'$ $\forall \omega' \in \mathcal{W}$. + petit

preuve : Soit $\omega_0 \in \mathcal{W}$ si $\omega_0 \leq \omega'$ $\forall \omega' \in \mathcal{W}$ c'est fini

sinon $\{ x \in \omega_0 \text{ tq } S_x \text{ isomorp}^e \text{ à 1 él}^t \text{ de } \mathcal{W} \}$ est non vide

$\cong \{ \omega' \in \mathcal{W} \mid \omega' < \omega_0 \}$

soit u le + petit él^t de cet ens. et soit $\omega \in \mathcal{W}$ isomorp^e à $S_u \cong \omega$

Si $\omega' \in \mathcal{W}$ on n'a pas (p/ def de u) ~~ω' isomorp~~ $\omega' < S_u \cong \omega$

donc $\omega \leq \omega'$. & ω est le + petit de $\mathcal{W}$.

Déf : Un ordinal est une classe d'isomorphisme d'ens. bien ordonnés.

Ce q' précède dit q tt ens. d'ordinaux est bien ordonné.

(avec $\alpha \leq \beta \overset{déf}{\iff} \exists X \in \alpha, \exists Y \in \beta$ tq $X \leq Y$ est bien défini)

En particulier, si α est un ordinal als $S(\alpha) = \{ \beta \text{ ordinal} \mid \beta < \alpha \}$ bien ordonné

Rq : Il n'a pas d'ens. de ts les ordinaux

prop : Si Δ est un ens. d'ordinaux als $\exists$ des ordinaux + gd q tt ordinal de Δ.

Sérion

preuve: $\Delta' = \Delta \cup \left(\bigcup_{x \in \Delta} S(\alpha) \right)$ est bien ordonné.

Soit α' son ordinal $\in \alpha'$ $\in \alpha$.

Si $\alpha \in \Delta$ alors $S(\alpha) \subset \Delta'$ et $S(\alpha) = S_\alpha$ (= seg^t initial de Δ'). donc $\alpha < \alpha'$.

$\alpha < \alpha'$ $\qquad (A,1) \cap (B,2) = \emptyset$

• on peut définir $\alpha + \beta$ ainsi $A \in \alpha$, $B \in \beta$ & $A \cap B = \emptyset$.

ordre sur $A \cup B$: $a \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$.

rend $A \cup B$ bien ordonné.

Alors $\alpha + \beta$ = classe $A \cup B$.

tjs d'ens bien ordonné ici

• ω = classe$(\mathbb{N}, \leq)$

ex: $n + \omega = (0, 1, \ldots, n-1) + (n, n+1, \ldots)$

$= (0, 1, \ldots) = \omega$ $\qquad \omega + n$ a 1 + gd élt $(n-1$ ici$)$

$\omega + n = (n, n+1, \ldots) + (0, 1, \ldots n-1) \neq \omega$ ici non.

Prop: α, β ordinaux, $\beta > 0$ [0 = classe de $\emptyset$].

alors $\alpha + \beta > \alpha$ $\qquad [\beta > 0 \iff \exists B \neq \emptyset$ bien ordonné $B \in \beta]$

preuve $C \in \alpha + \beta$ $\quad \exists A \in \alpha, B \in \beta$ et $B \neq 0$ car $\beta > 0$.

$C = A \cup B$ $\quad A \cap B = \emptyset$

donc A = seg^t initial strict de C donc $\gamma = \alpha + \beta \geq \alpha$.

03.2010

- un ordinal est 1 classe d'équivalence d'ens. bien ordonnés ($\sim$ si $\exists$ bijecⁿ q préserve l'ordre).
- un ordinal est lui m^ bien ordonné p la relaⁿ
- Tout ens d'ordinaux est bien ordonné. X s'injecte ds Y en préservant l'ordre (satisfaisant initial)

$\beta < \alpha$ si $\exists X \in \beta$ $Y \in \alpha$ tq X s'injecte ds Y en préservant l'ordre (i.e. X isomorphe à 1 segment initial de Y)

- Donné un ens Δ, d'ordinaux, $\exists$ un ordinal strict, plus gd q tous ceux de Δ.
- α ordinal $S(\alpha) = \{\beta$ ordinal $/ \beta < \alpha\}$ $\quad S(\alpha) \in \alpha$.

preuve: $X \in \alpha$ (Mq $S(\alpha)$ isomorphe à X)

$\beta < \alpha$ $\quad Y \in \beta$ $\quad Y$ isomorphe à S_x une secⁿ initiale de X.

la flèche $\beta \to x$ est bien définie ($S_x \simeq S_{x'} \Rightarrow S_x = S_{x'}$) car

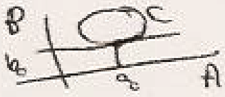
$\alpha > \beta \leftarrow S_x \leftarrow x$

- on veut définir $\alpha\beta$

$A \in \alpha$, $B \in \beta$ on considère $A \times B$

$(a, b) < (a', b') \iff b < b'$ ou $\begin{cases} b = b' \\ a < a' \end{cases}$ $\quad$ (ordre lexicographique inverse)

donne un bon ordre s/ $A \times B$: $C \subset A \times B$



Soit $b_0 = \min\{b / \exists a \in A$ tq $(a,b) \in C\}$

Puis $a_0 = \min(C \cap (A \times \{b_0\}))$ $\quad (a_0, b_0) = \min C$.

$\omega = (0, 1, \dots, n \dots)$ ω = classe d'équivalence de $(0, 1, \dots n \dots)$

$2 = \{a, b\}$ $a < b$ (1 seul bon ordre $\forall$ 1 ens. fini)

$\omega 2 = \{(0,a), (1,a), (2,a), \dots, (n,a), \dots, (0,b), (1,b) \dots\}$

$\underset{\text{1}^{\circ}\text{ p/ rapp. d'abord}}{=}$ $\omega + \omega$ $\neq$

bijection

$\underset{\text{1}^{\circ}\text{ d'abord}}{2\omega} = \{(a,0), (b,0), (a,1), (b,1), (a,2), (b,2), \dots\} = \omega$ $\varphi((a,n)) = 2n$, $\varphi((b,n)) = 2n+1$

Déf. • Un ordinal est <u>successeur</u> (= du 1er ordre) si

$\exists \beta < \alpha$ tq $\forall$ ordinal γ $\gamma \leq \beta$ ou $\gamma \geq \alpha$ et alors $\alpha = \beta + 1$ Rien β α

• Un ordinal est <u>limite</u> s'il n'est pas successeur (= pas prédécesseur) (= du 2ème type)

autremt dit $\forall \beta < \alpha \ \exists \gamma$ tq $\beta < \gamma < \alpha$.

exple • n est le successeur de $n-1$, ~~ω est limite~~.

• ω est limite $\exists$ n et ω il y a $n+1, n+2, \dots$

• Soit φ un ordinal limite $\geq \omega$. La suite d'ordinaux (α_ξ), $\xi < \varphi$ est dite croissante si $\alpha_\xi < \alpha_\zeta$ dès q $\xi < \zeta$ $\omega = \lim(\omega + n)$

Soit λ le plus petit ordinal plus gd q tous les α_ξ

Mq $\lambda = \lim \alpha_\xi$. Soit $\mu < \lambda$. si λ + petit $\to$ dépasse α_ξ

$\exists \nu < \varphi$ tq $\alpha_\nu > \mu$

d'où $\nu \leq \xi < \varphi \Rightarrow \mu < \alpha_\xi < \lambda$

ω classe d'équivalence de $\mathbb{N}$ n $\{0, \dots n-1\}$ isomorphe au début de $\mathbb{N}$.

$n < n+1$
$\{0, \dots n-1\} \subset \{0 \dots n\}$

* $\overset{0}{\emptyset}, \overset{1}{\{\emptyset\}}, \overset{2}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}, \overset{3}{\{\underset{0}{\emptyset}, \underset{1}{\{\emptyset\}}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{2}\}} \dots$ $\omega + \omega + \omega \overset{\text{II}}{\geq}$

$\underset{(\mathbb{N}, \leq)}{\omega}, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + n, \dots, \underset{\text{ordinal limite}}{\omega + \omega = \omega 2}, \omega 2 + 1, \dots, \omega 3$

$\omega 3 + 1, \dots, \omega n, \omega n + 1, \dots, \omega^2$

$\omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \dots, \omega^2 + \omega n_1 + n_0, \dots,$

$\dots \omega^k n_k + \omega^{k-1} n_{k-1} + \dots + \omega n_1 + n_0, \dots,$

$\omega^\omega, \omega^\omega 2, \dots, \omega^{\omega+1}, \dots, \omega^{\omega+2}, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots \varepsilon_0, \varepsilon_0^2, \dots, \omega_1.$

ω_1 tq $S(\omega_1)$ est non dénombrable

ms $\forall \beta < \omega_1$ $S(\beta)$ est dénombrable

<u>Lemme</u> : $\mathcal{E}$ une famille de sous-intervalles de $[a, b[\subset \mathbb{R}$

tq $\forall x \in [a, b[$ $\exists y$, $x < y < b$ tq $[x, y[\in \mathcal{E}$

<u>Alors</u> $\exists$ une sous-famille dénombrable $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ d'intervalles disjoints

tq $\bigcup_{[x,y[\in \mathcal{E}} [x, y[= [a, b[$

$[$ a x y b $[$

$[_a$ $[_b$ $\to$ on les ordinaux on finira 1 jr, car les ordinaux $\neq$ ens

<u>preuve</u> : Soit $x_0 = a$, $x_1 < b$ tq $[x_0, x_1[\in \mathcal{E}$.

Supposons que $\forall$ ordinal α, on ait choisi $x_\beta < b$ de sorte que $[x_\beta, x_{\beta+1}[\in \mathcal{E}$ $\forall \beta$ tq $\beta + 1 < \alpha$.

On choisit alors x_α ainsi
si α est un ordinal limite $x_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} x_\beta$
- Si $\alpha = \gamma + 1$ et $x_{\gamma} < b$, on choisit $x_\alpha < b$ tq $[x_{\gamma}, x_\alpha[\in \mathcal{E}$ (donné par ...)
$\rightarrow$ tant rq $\rightarrow$ processus continue
- Cela doit s'arrêter sinon $\alpha \rightarrow x_\alpha$ est injective, la famille des ordinaux formerait un ens. [$P(x)$ une pté : l'univers de ts les x tq $P(x)$ n'as pas de sens ms si X est un ens. $\{x \in X \;/\; P(x)\}$ est un ensemble.]

"sinon on arrive à des barbiers se rasent eux-m... c'est délicate quoi !"

- dnbrble on fait $\alpha \rightarrow [x_\alpha, x_{\alpha+1}[$ est injective (ils ne se recouvrent jms). vrai
$\exists q_\alpha \in \mathbb{Q}$. $\in$

donc $\alpha \longrightarrow q_\alpha$ est injective $\rightarrow \{\alpha\}$ dnbrble

Thme (récurrence transfinie)

- Soit P une pté des ordinaux tq $\forall \alpha$ on ait
$(\forall \beta \;\; \beta < \alpha \;,\; P(\beta)) \Rightarrow P(\alpha)$
als $P(\alpha)$ est vrai $\forall \alpha$.
- Autremt dit $\begin{cases} P(0) \text{ vraie} \\ P(\beta) \text{ vraie} \Rightarrow P(\beta+1) \text{ vrai} \\ P(\beta) \text{ vraie } \forall \beta < \gamma \Rightarrow P(\gamma) \text{ vraie} \end{cases}$ (ordinaux limite)
Als $P(\alpha)$ est vraie
- A ens. bien ordonné, P une pté s/ les élt de A tq
$(\forall y < x \;,\; P(y)) \rightarrow P(x)$
Als $P(x)$ $\forall x \in A$.

preuve $Z \subset A$ l'ens. des x tq non $P(x)$
si Z non vide (ens. bien ordonné $\rightarrow \exists$) soit x_0 le + petit élt de Z
on a $\forall y < x_0 \;,\; P(y)$
$\Rightarrow P(x_0)$ vrai absurde

"Bon on va encore faire un petit peu joujou".

Prop. α, β ordinaux, $\alpha < \beta$ Als $\exists! \, \gamma > 0$ tq $\alpha + \gamma = \beta$

preuve : $A \in \alpha \;\; B \in \beta$, $\alpha < \beta$ dit que $A \cong B_x = \{b \in B \;/\; b < x\} \subset B$
Soit $C = B \setminus B_x$ et soit γ = classe de C (d'équivalence)

$\left.\begin{array}{c} B_x \overset{<}{\cup} C = B \\ B_x \cap C = \emptyset \\ \text{les élt de } C \text{ plus gd} \\ \text{q ceux de } B_x \end{array}\right\} \rightarrow \alpha + \gamma = \beta$

unicité si $\beta = \alpha + \gamma_1 = \alpha + \gamma_2$ $\gamma_1 \neq \gamma_2$
disons $\gamma_1 < \gamma_2$, als $\exists\, \delta > 0$ tq
$\gamma_2 = \gamma_1 + \delta$ d'où

$\beta = \alpha + \gamma_2 = \alpha + (\gamma_1 + \delta) = (\alpha + \gamma_1) + \delta = \beta + \delta > \beta$
contredit α, β ordinaux $\underset{\beta > 0}{\Rightarrow} \alpha + \beta > \alpha$

Rmq. : donc l'équ $\alpha + \xi = \beta$ a 1 uniq solution si $\alpha < \beta$
mo l'éq. $\xi + \alpha = \beta$
peut n'avoir aucune sol° même si $\beta > \alpha$ p/ exple $\xi + 1 = \omega$.

Prop. : $\exists$ un ordinal classe d'1 ens. non dénombrable

preuve : $A = \{$ ordinaux classe d'1 ens. dénombrable bien ordonné $\}$
on sait q A est bien ordonné.
Soit Ω sa classe.

Affirmat° : $A = \{ \text{ordinaux } \xi \mid \xi < \Omega \}$

preuve : déjà vu $\exists$ un ordinal α plus gd q tt ordinal de A
donc $A \subset \{\xi \mid \xi < \alpha\}$ et A est 1 segmt initial de cet ensemble
$(\xi' < \xi \Rightarrow \xi' \in A)$.

donc $\exists \gamma \leq \alpha$ tq $S_\gamma = A$.
alors $\gamma = \text{classe } S_\gamma = \text{classe } A = \Omega$

Enfin, si A était dénombrable, sa classe Ω serait ds A
donc on aurait $\Omega < \gamma = \Omega$.

rmq : le cardinal de $A = \{\xi \mid \xi < \Omega\}$ est donc $> \text{card } \mathbb{N}$.

Question : A-t-on $\text{card} A = \text{card } \mathbb{R}$?
c'est l'hyp. du continu (Gödel (si oui $\Rightarrow$ pas X) 30's.
Cohen 60's (si non $\Rightarrow$ pas X))

- Ω est le premier ordinal tq $S(\Omega)$ est non dénombrable.

Prop. : card A suit immédiat^t card $\mathbb{N}$
càd si $\text{card} X < \text{card} A$ alors $\text{card} X \leq \text{card } \mathbb{N}$ ⚠ X pas muni d'1 bon ordre

preuve : p/ hyp. X a même cardinal q 1 sous ens B de A. (é en bijecti° q ne préserve pas l'ordre)
Soit β la classe de B. $B = S_\beta$ $\beta < \Omega$ $(\beta \in A)$
p/ déf de Ω, B est dénombrable càd $B \rightarrow \mathbb{N}$, $\text{card} X \leq \text{card } \mathbb{N}$.

- Donc l'hyp. du continu est :
existe-t-il une partie X de $\mathbb{R}$ tq $\text{card } \mathbb{N} < \text{card} X < \text{card } \mathbb{R}$?

indécidable
conséquence partielle de Gödel
card $B(\mathbb{R})$

- l'hyp. du continu impliq $\exists$ un bon ordre $\leq$ $\mathbb{R}$
dont tout segmt initial est dénombrable. → "et ça s'apparait bizarre que croise !!"

Axiome du choix

1) $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ens. non vides Alors $\exists$ une fct $f : I \to \{A_i\}$ tq $f(i) \in A_i$ — $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3)$

2) $\{A_i\}_{i\in I}$ fam. d'ens non vides. Alors $\prod_{i\in I} A_i \neq 0$

3) $\forall$ ens. X $\exists$ $f : \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\} \longrightarrow X$ tq $f(A) \in A$ $\forall A \subset X$ $A \neq 0$ (pique 1 élt)
(fonction de choix)

démo $1) \Rightarrow 2)$
en effet, $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \Rightarrow \prod_{i\in I} A_i \neq 0$ — calcul int $\Rightarrow$ axiome du choix

$2) \Rightarrow 3)$ on pose $\{A_i\} = \{A \subset X, A \neq \emptyset\}$ $(I = \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\})$
$f(i) \in A_i$ est exactement $f(A) \in A$

$3) \Rightarrow 1)$ $X = \underbrace{\amalg A_i}_{\text{union disjointe}}$ $f : \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\} \to X$
on pose $\varphi(i) = f(A_i) \in A_i$

∞ de mani^{re} non effective $\to$ règle

Thme (Vitali) Il n'existe pas de mesure μ dénombrabl^t additive, invariante p^r translation tq $\mu([a,b]) = b-a$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

déte// $\to$ pers. ne peut vérifier

Précisément, il n'existe pas $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ tq $\cdot\, \mu(\emptyset) = 0$

- $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ si les A_k st disjoints
  $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ $A_1 \subset A_2 \subset \dots A_k = \bigcup A_k$ alors $\mu(A_k) \to \mu(A)$
- $\mu(t+A) = \mu(A)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
- $\mu([a,b]) = b-a$ $-\infty < a \leq b < +\infty$

preuve: on décompose $\mathbb{R}$ en classe d'équivalence mod $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ et π infini) $(s \sim t \Leftrightarrow s-t \in \mathbb{Q})$ on regarde ces classes d'équivalence coupées avec $[0,1]$ et une fct de choix f sur ces (classes $\cap [0,1]$)

Si A = l'ens. des valeurs de $f \subset [0,1]$
les $t+A$, $t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ st disjoints (sinon $t+A$ rencontre $s+A$ $t, s \in \mathbb{Q}$
$\exists$ ~~X, Y~~ tq $t + fX = s + fY \Rightarrow \overset{\in X}{fX} - \overset{\in Y}{fY} = s-t \in \mathbb{Q} \Rightarrow X = Y \Rightarrow f(X) = f(Y)$ $\Rightarrow s=t$
$\to$ disjointes car si elles se rencontrent, elles rencontrent elles $\mathbb{X}$)

sont contenues ds $[0,2]$

donc $\sum \mu(t+A) \leq \mu[0,2] = 2 \Rightarrow \underline{\mu(t+A) = \mu(A) = 0}$

mais $\bigcup_{t\in\mathbb{Q}} (t+A) \supset [0,1] \Rightarrow \sum \mu(t+A) \geq 1 \Rightarrow \underline{\mu(A) > 0}$. $\square$
$\bigcup A$ = partie de $\mathbb{R}$ $\qquad \sum \mu(A)$

Cor: théorie de la mesure! / espace où toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable

Thme (Zermelo) Tt ens. peut être bien ordonné (~~admet~~ le + petit élt)

preuve (choix $\Rightarrow$ Zermelo) X ens, $f : \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\} \to X$ fct de choix
on définit x_α, α ordinal p^r réc. transfinie

$x_\alpha = f(X \setminus \{x_\beta / \beta<\alpha\})$ si $\{x_\beta / \beta<\alpha\} \subsetneq X$

bien sûr $\alpha \neq \beta \Rightarrow x_\alpha \neq x_\beta$ (injectif)

Si on avait tjs $\{x_\beta, \beta<\alpha\} \neq X$ on aurait 1 injecⁿ S famille des ordinaux ds X et cette fam. des ordinaux serait 1 ensemble

Si α est le premier ordinal tq

$\{x_\beta / \beta<\alpha\} = X$ als $S(\alpha) \underset{def}{=} \underbrace{\{\overset{ordinal}{\beta} / \beta<\alpha\}}_{\text{bien ordonné}}$ est en bijecⁿ avec X $\quad \beta \longrightarrow x_\beta$.

(Zermelo $\Rightarrow$ choix) X on cherche $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ tq $f(A) \in A$

on met un bon ordre $\leq$ sur X.

on pose si $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ $\quad f(A) = \underset{\in A}{\min A}$ ($\exists$ car + ptit élt)

Thme (Lemme de Zorn) $(X, \leq)$ partiellᵗ ordonné (ordre non néc. total)

Si toute chaîne C (= partie totalᵗ ordonnée) a un majorant $m(C)$

als X admet un élt maximal

pv (choix $\Rightarrow$ zorn) $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ fcⁿ de choix

on définit x_α, α ordinal, p récurrence transfinie, x_0 qlqconq

$$\begin{cases} x_\alpha = f(\{y \in X / y > x_\beta\}) \text{ si } \{y \in X / y > x_\beta\} \neq \emptyset \quad (\in X) \\ \alpha = \beta + 1 \\ x_\alpha = m\{x_\beta / \beta<\alpha\} \quad \text{si } \alpha = \sup\{\beta / \beta<\alpha\} \text{ car p construcⁿ} \end{cases}$$

cas ordinalx successeur / limite

$\cdot x_\omega$

$\cdot x_2$

$\cdot x_1$

$\cdot x_0$

$\{x_\beta / \beta<\alpha\}$ est en bijecⁿ préservant l'ordre avec $\{\beta / \beta<\alpha\}$ q est totalᵗ ordonné

$\alpha \longrightarrow x_\alpha$ est injective donc ne peut pas être définie sur ts les ordinaux

donc $\exists \beta$ tq $\{y \in X / y > x_\beta\} = \emptyset$ $\rightarrow$ pas d'élt $> x_\beta$.

donc x_β est maximal

(Zorn $\Rightarrow$ choix) $\mathcal{Y} = \{(f, A) / \emptyset \neq A \subset X,$ tq $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ fcⁿ de choix $\}$

$(f_1, A_1) \leq (f_2, A_2)$ si $A_1 \subset A_2$ et $f_1 = f_{2/\mathcal{P}(A_1)}$

$\cdot$ $\{(f_i, A_i)\}$ totalᵗ ordonnée $\quad A = \bigcup A_i \quad f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$

Si $B \subset A$ als $B \subset A_i$ pr un des A_i on pose $f(B) = f_i(B)$

ne dpd pas du choix de i.

$B \subset A_j \quad \overset{\text{ou l'inverse}}{\text{ops}} \quad A_j \supset A_i \quad f_j(B) = f_i(B)$ car $f_{j/\mathcal{P}(A_i)} = f_i$.

Zorn donne als (f, Y) extremal

on veut $Y = X$.

Si $Y \subsetneq X$ soit $x \in X \setminus Y$ $\quad f_2 : \mathcal{P}(Z) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow Z$

soit $Z = Y \cup \{x\}$ $\quad A \subset Z$ si $x \notin A$ $f_2(A) = f(A) \in A$. (fcⁿ pr Y)

si $x \in A$ $f_2(A) = x \in A$

donc $(f_2, Z) > (f, Y)$

$\hookrightarrow$ contradicⁿ déf de (f, Y).

Séries 13

__Th__ Tout espace vectoriel admet une base

__1ère preuve:__ E ev on met un bon ordre $\mathscr{A}$ $E\setminus\{0\}$ de sorte que

$$E=\{0\}\cup\{x_\alpha \mid \alpha<\mu\} \text{ pr } 1 \text{ ordinal } \mu.$$

on construit une base $(e_\beta)_{\beta<\alpha}$ p/ induct° transfinie

$e_0 = x_0 \neq 0 \rightarrow$ libre

si on construit e_β $(\beta<\alpha)$, on pose $e_\alpha = \{$le + petit x_γ tq $x_\gamma \notin \langle e_\beta$ où $\beta<\alpha\rangle\}$

$\langle\ \rangle$ = esp. vect engendré

on continue jq $\langle e_\beta \mid \beta<\alpha\rangle = E$ (ça arrive 1 jr sinon les ordinaux formerait 1 ens.)

on a alors une base: si $\sum_{\text{finie}} \lambda_i e_{\beta_i} = 0$

si $\beta_n = \sup \beta_i$ $\quad e_{\beta_n} \notin \langle e_\beta \mid \beta<\beta_n\rangle$ p/ construct°

donc $\lambda_n = 0$

__2e preuve:__ (avec Zorn) $\mathscr{S} = \{(S,\subseteq)\}$ famille de ts les sous ens. de E libres ordonnés p/ inclusion, $\{x\}$ $x\neq 0$ mq $\mathscr{S}\neq\emptyset$.

Si $\{S_i, i\in I\}$ est une chaîne $\bigcup S_i$ est un majorant

$\left(\sum_{\text{finie}} \lambda_\alpha x_\alpha = 0 \quad x_\alpha \in \bigcup S_i \Rightarrow\right.$ ts les x_α st ds 1 m̂ S_j

$\beta\neq\alpha$ $\lambda_\beta = 0$ et donc $\lambda_\alpha x_\alpha = 0 \Rightarrow \lambda_\alpha = 0$.

$x_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_n}$
$\in S_{i_1}$ $\quad \in S_{i_n}$
$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \in S_{i_2} \dots$

Zorn me donne B ens libre maximal (pr inclus°)

__B est une base__ Sinon $\exists x \in E\setminus\langle B\rangle$

ms alors $B\cup\{x\}$ est libre $\times$, def de B.

__Thme (Hahn-Banach)__ E ev réel normé $\supset F$ sev

$f: F \to \mathbb{R}$ forme linéaire tq $|f(x)| \leq \|x\|$

Alors $\exists$ une extension $\tilde{f}$ forme linéaire $E\to\mathbb{R}$ tq $|\tilde{f}(x)|\leq\|x\|$ $x\in E$

__Lemme:__ On sait f^e^ (sans axiome du choix) si F hyperplan

F sev qq (codim F qq pq pas ∞)

On pose F_α = prolongt de f_β sur un F_α dont F_β est un hyperplan (ordinal)

si $\alpha=\beta+1$ (possible si $F_\beta\neq E$).

F_α = prolongt commun des F_β s/ $\bigcup F_\beta$

si $\alpha = \sup_{\beta<\alpha}\beta$ $\quad f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ si $x\in F_\beta$.

ceci ne s'arrête pas

$\alpha \to F_\alpha$ injec° des ordinaux ds $\mathcal{P}(E)$ $\cancel{\Rightarrow}$.

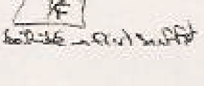
__Zorn__ $\mathscr{S} = \{(G,g)\}$ G sev de E, $F\subset G$ $\quad g: G\to\mathbb{R}$ forme linéaire $g_{/F} = f$

$(G,g)\leq(G',g')$ si $G\subset G'$ et $g'_{/G} = g$

__exo:__ finir la preuve

__Démo lemme__ Soit $v\notin F$ un élt de E s'écrit $x+tv$ $x\in F$, $t\in\mathbb{R}$ Soit $a\in\mathbb{R}$

$\tilde{f}(x+tv) = f(x) + ta$ linéaire et prolonge f. $\quad$ | → prolongt et prolongt s'écrit c̄ ça



on cherche a tq $|\tilde{f}y| \leq \|y\| \underset{\substack{\text{divise pt} \\ t=a \text{ ok déjà}}}{\Longleftrightarrow} |f(x)+a| \leq \|x+v\| \quad \forall x \in F$

$\Leftrightarrow \quad -\|x+v\| \leq f(x)+a \leq \|x+v\|$

$\Leftrightarrow \quad -f(x) - \|x+v\| \leq a \leq -f(x) + \|x+v\| \quad \forall x \in F$

mo $|fx - fx'| = |f(x-x')| \leq \|x-x'\| \quad \forall x, x' \in F \quad \leq \|x+v\| + \|x'+v\|$

d'où $-f(x') - \|x'+v\| \leq -f(x) + \|x+v\| \quad \forall x, x' \in F$

E fermé $\subset [0, 2\pi]$ $\quad \underset{\text{fermé}}{E'} = \{ \text{p}^{t} \text{ accumulateurs de } E \} \subset E$

on définit p/ induction transfinie, pr tout ordinal α, un fermé $E^{(\alpha)}$

$$E^{(0)} = E \quad \begin{cases} E^{(\beta)} = (E^{(\alpha)})' & \text{si } \beta = \alpha+1 \text{ successeur} \\ E^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha < \lambda} E^{(\alpha)} & \text{si } \lambda \text{ ordinal limite} \end{cases}$$

<u>Lemme:</u> Si F_α, α ordinal, est une suite $\searrow$ de fermés (de $[0, 2\pi]$)
als $\exists$ un ordinal dnbrble tq $F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1}$

<u>preuve:</u> $\{U_n\}$ une énumérat° des $\{ B(r, \frac{1}{n}) \; r \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi] \}$

Soit $A_\alpha = \{ n \text{ tq } U_n \cap F_\alpha = \emptyset \}$

on a $\alpha \leq \beta \Rightarrow F_\beta \subset \underset{+\text{gros}}{F_\alpha} \Rightarrow A_\alpha \subset A_\beta$

Si $A_\alpha \subsetneq A_{\alpha+1}$ pr ts les ordinaux dnbrbles α.

Soit $f(\alpha)$ le + petit $n \in A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$. $\quad$ ĉ ω_1 est représenté p/

si ω_1 est le premier ordinal non dnbrble,

$\{ \underset{\text{dnbrble}}{\alpha} / \alpha < \omega_1 \}$ ens bien ordonné

on a $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{N}$ injective

contradict° ω_1 non dnbrable.

donc $\exists\, \alpha_0 < \omega_1$ dnbrble tq $A_{\alpha_0} = A_{\alpha_0+1}$ et donc $F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1}$ $\quad F_{\alpha_0} \setminus F_{\alpha_0+1}$ fermé

Donc $\forall$ fermé $E \subset [0, 2\pi]$, il y a 1 + petit α dnbrble tq $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)}$ (suite $\searrow$ applicat° lemme)

et donc $E^{(\alpha)} = E^{(\beta)} \quad \forall \alpha \leq \beta$.

---

on pose $\alpha = \mathrm{rg}\,E$ (rg de Cantor-Bendixon)

<u>Rmq</u> $E^{\mathrm{rg}(E)}$ est le + gd ens. parfait $\subset E$.

Sébrian 14

Thme (Cantor - Bendixson) E fermé $\subset [0,2\pi]$

Alors $E \setminus E^{rg E}$ est dénombrable.

En part, E dénombrable $\Leftrightarrow E^{rg E} = \emptyset$

$E = E^{(0)} \supset E^{(1)} \supsetneq E^{(2)} \dots \supsetneq E^{(\alpha)} \supsetneq E^{(\alpha+1)} \dots \supset E^{rg E} = \dots$

preuve : Si $x \in E \setminus E^{rg E}$, $\exists ! \alpha$, $\alpha < rg E$ tq $x \in E^{(\alpha)} \setminus E^{(\alpha+1)}$

L'ens. des $\alpha < rg E$ est dnbrble. Il suffit de vérifier.

Lemme Pour tout fermé $F \subset [0,2\pi]$, $F \setminus F'$ est denbrble.

preuve : U_n une numérotation des $\{ B(r, \frac{1}{n}) \; r \in \mathbb{Q}^{\cap [0,2\pi]}, n \in \mathbb{N}^* \}$

Si $x \in F \setminus F'$, $\exists n$ tq $F \cap U_n = \{x\}$

$F \setminus F' = \bigcup_n \{ F \cap U_n / F \cap U_n \text{ singleton} \} \longrightarrow$ dénombrable.

Thme (Cantor) Tout fermé dnbrable est un ens. d'unicité

preuve : E fermé dnbrble $\subset [0,2\pi]$ $S \sim \sum c_n e^{inx}$ tq $\sum c_n e^{inx} = 0$ hors de E

on veut $c_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}$

Tout translaté d'1 ens. d'unicité est encore un ens. d'unicité

($E + \alpha$ $\sum c_n e^{i(n)(\alpha + x)} = 0 = \sum c_n e^{in\alpha} e^{inx} \Rightarrow c_n e^{in\alpha} \overset{\forall n}{=} 0 \Rightarrow c_n = 0 \; \forall n$)

On peut donc supposer $0 \notin E$

Alors $[0,2\pi] \setminus E$ est une union disjointe d'intervalles ouverts d'extrémités ds $E \cup \{0, 2\pi\}$, ce st les intervalles contigus à E.

on va montrer p/ induction transfinie sur α, q $\left(F_S(x) = -\sum \frac{c_n}{n^2} e^{inx} \right)$

F_S est linéaire s/ chaq intervalle contigu à $E^{(\alpha)}$.

ĉ $E^{(\alpha_0)} = \emptyset$ (E dnbrble, fermé) on a q F_S est linéaire s/ $]0,2\pi[$ et donc (déjà vu) $c_n = 0 \; \forall n$

- $\alpha = 0$ $\sum c_n e^{inx} = D_2 F_S(x) = 0$ sur chaq intervalle contigu à E.

donc (déjà vu) F_S linéaire s/ ts ces intervalles.

- $\alpha \to \alpha + 1$: supp. F_S linéa s/ chaq intervalle contigu à $E^{(\alpha)}$

ordinaux bien ordonnés $\Rightarrow \exists$ + petit élt

Soit $]a,b[$ contigu à $E^{(\alpha+1)}$. Ds chaq intervalle fermé $[c,d] \subset]a,b[$ il n'y a q'1 nb fini de pt de $E^{(\alpha)}$

$c \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le d$ $]c, x_0[,]x_0, x_1[, \dots,]x_n, d[$ st contenus ds des intervalles contigus à $E^{(\alpha)}$

donc p/ hyp de réc. F_S est linéa s/ chacun et F_S n'a pas de coins (2nd lemme de Riemann) donc F_S est linéa s/ $[c,d]$ donc s/ $]a,b[$.

Tt $\alpha < \lambda \Rightarrow \lambda$ Soit $]a,b[$ contigu à $E^{(\lambda)}$ et $[c,d] \subset]a,b[$

alors $[c,d] \subset]0,2\pi[\setminus \bigcap_{\alpha < \lambda} E^{(\alpha)} = \bigcup_{\alpha < \lambda} ( ]0,2\pi[\setminus E^{(\alpha)})$. $E^{(\alpha)} \supset \dots \supset E^{(\lambda)}$

d'où $[c,d] \subset \bigcup_{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n}]0,2\pi[\setminus E^{(\alpha)} \subset]0,2\pi[\setminus E^{(\beta)}$ si $\beta \geq \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\lambda > \beta$

donc $[c,d] \subset$ intervalle contigu à $E^{(\beta)}$ p/ hyp de réc. F_S est linéaire s/ $[c,d]$ donc s/ $]a,b[$

Thme $\mathbb{R}^3$ est une union de cercles disjoints ......

Thme $\mathbb{R}^2$ n'est pas une union de cercles disjoints

preuve $\mathbb{R}^2$: Soit C_0, un cercle C_1 contenant le centre de C_0

———— C_2 ———— C_1

Les disq. D_n de bord C_n vérifient $D_0 \supset D_1 \supset \dots$ (car tous les C_n sont disjoints).

~~A y fermé de compacts, ≠ ∅~~ Par compacité $\bigcap D_n \neq \emptyset$.

et ĉ rayon $C_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ rayon C_n. diam $D_n \to 0$ donc on a $\bigcap_n D_n = \{p\}$

Si $p \in C$, $C \neq C_n$ ($\not\ni p$) et si rayon $C_n <$ rayon C alors $C_n \cap C \neq \emptyset$.

preuve $\mathbb{R}^3$: Soit un bon ordre s/ $\mathbb{R}^3$ q' met $\mathbb{R}^3$ en bijecQ
préservant l'ordre avec Ω = 1er ordinal de cardinal = card. de $\mathbb{R}$

On construit la famille C_x des cercles disjoints tq $x \in C_x$,
p/ rec. transfinie $x = x_0$ C_0 = n'importe quel cercle contenant x_0.

Supp. avoir un cercle C_β pr $\forall \beta < \alpha$ tq $x_\beta \in C_\beta$ et les C_β disjoints ou identiq.

On définit C_α : si $x_\alpha \in C_\beta$ pr un $\beta < \alpha$. on pose $C_\alpha = C_\beta$.

Sinon soit P un plan contenant x_α q' ~~n'est coplanaire~~ contient ~~avec~~ aucun des C_β $\beta < \alpha$.

(c'est possible car il y a card R plans passant par x_α.
et seul^t card α = card $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ < card R car $\alpha < \Omega$.

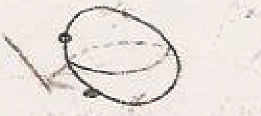
P coupe chq C_β ($\beta < \alpha$) en au plus 2 pts.

on choisit d une dte d de P passant par x_α

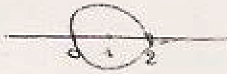
Ds P il y a card R cercles passant p/ x_α et seul^t 2 card α (< card Ω = card R) st tangent à d
p^t de $\{C_\beta\}_{\beta<\alpha} \cap P$.

d'où un cercle C_α, $x_\alpha \in C_\alpha$ et $\{C_\beta, \beta \leq \alpha\}$ st 2 à 2 disjoints ou confondus.

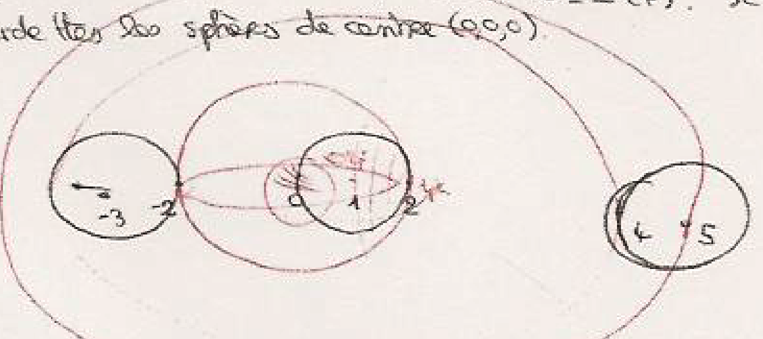
preuve géométrique : toute 2-sphère privée de 2 pts
s'écrit ĉ union de cercles disjoints.



cercles ds xOy centrés en $(x,0,0)$ de rayon 1 si $x \equiv 1$ (4). $x \in \mathbb{Z}$



on regarde ttes les sphères de centre $(0,0,0)$



Suites de Goodstein

Déf : le dvlp^t itéré de n en base p consiste à écrire

$n = p^{n_1}c_1 + \dots + p^{n_k}c_k$ $\quad 1 \leq c_i \leq p-1$, n_i entier $\leq n$, $n_1 > n_2 > \dots > n_k$

puis les n_i en base p et à itérer

exple $p=2$ $26 = 2^4 + 2^3 + 2 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^1$

Déf: 1) Pr $q \geq p \geq 2$ on définit $T_{p,q} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $T_{p,q}(n)$ est obtenu en prenant le dvlpt itéré de n en base p puis en remplaçant p par q et en évaluant le résultat (on obtient des pts nb).

2) $\forall d \in \mathbb{N}$ la suite de Goodstein de base d est la suite $g_2, g_3, \ldots$ définie p/

$$g_2 = d \text{ et } \begin{cases} g_{p+1} = T_{p,p+1}(g_p) - 1 & g_p \neq 0 \\ \quad = 0 & g_p = 0. \end{cases}$$

exple: $d = g_2 = 26$

$$g_3 = T_{2,3}(26) - 1 = T_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2+1} + 2) - 1$$
$$= 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3 - 1$$
$$= 3^{27} + 3^4 + 2 = 7.625.597.485.071$$

- $g_2(1) = 1$ $g_3(1) = 1-1 = 0$
- $g_2(2) = 2$ $g_3(2) = 3-1 = 2$ $g_4(2) = 2-1 = 1$. $g_5(2) = 1-1 = 0$
- $g_2(3) = 3 = 2+1$ $g_3(3) = 3+1-1 = 3$ $g_4(3) = 4-1 = 3$
  $g_5(3) = 3-1 = 2$
  $g_6(3) = 2-1 = 1$
  $g_7(3) = 1-1 = 0$.
- $g_2(4) = 2^2$ $g_3(4) = 3^3 - 1 = 26 = 2.3^2 + 2.3 + 2$
  $g_4(4) = 2.4^2 + 2.4 + 2 - 1 = 41$
  $\vdots$
  $g_{22}(4) = 2.22^2 + 1 = 962$
  $g_{23}(4) = 2.23^2 = 1058$

on atteint 0 ~~en~~ au bout de $3^{2402653211} - 3$ itérat°.

Thme (Ramsey. Goodstein 1942) $\forall g\ \exists p$ tq $g_p = 0$.

preuve: Soit $T_{p,\omega}(n)$ l'ordinal obtenu en remplaçant p par ω (= 1er ordinal non fini) ds le dvlpt itéré de n en base p. ex: $T_{2,\omega}(26) = T_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2+1} + 2) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + \omega$.

(l'arithmétiq des ordinaux donne q $T_{p,\omega}$ est 1 fct strict ↗ (ssi $T_{p,\omega}(n) < T_{p,\omega}(n+1)$))

Posons $\tilde{g}_p = T_{p,\omega}(g_p)$ $p \geq 2$

$$\begin{tikzcd}
g_2 \arrow[r, "T_{2,3}"'] \arrow[d, "T_{2,\omega}"'] & * \arrow[r, "-1"'] \arrow[d, "T_{3,\omega}"'] & g_3 \arrow[r, "T_{3,4}"'] \arrow[d, "T_{3,\omega}"'] & * \arrow[r, "-1"'] \arrow[d, "T_{4,\omega}"'] & g_4 \arrow[r] \arrow[d, "T_{4,\omega}"'] & * \arrow[r, "-1"'] \arrow[d] & {} \\
\tilde{g}_2 \arrow[r, phantom, "="] & \tilde{g}_2 \arrow[r, phantom, ">"] & \tilde{g}_3 \arrow[r, phantom, "="] & \tilde{g}_3 \arrow[r, phantom, ">"] & \tilde{g}_4 \arrow[r, phantom, "="] & \tilde{g}_4 &
\end{tikzcd}$$

si $g_p \neq 0$ $\tilde{g}_{p+1} = T_{p+1,\omega}(g_{p+1}) = T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p) - 1) < T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p)) = T_{p,\omega}(g_p) = \tilde{g}_p$.

donc (ttte partie non vide d'ordinaux ayant 1 + petit élt)

$\exists p$ tq $\tilde{g}_p = 0$ donc $g_p = 0$

culture: Kirby & Paris 1982
ce thme ne peut pas se démontrer ds le système de Peano.