Intégration

Le premier but du cours d'intégration est de **prouver** le résultat

B. — *Une fonction réelle continue sur un intervalle réel y admet une primitive.*

Après cela on dégagera pour les fonctions réelles sur un intervalle I

$$f : I \to \mathbf{R}$$

la *condition de Riemann* : une propriété qui est stable par combinaison linéaire, max et min de fonctions[1]et et qui permet, pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$, de définir

l'*intégrale (de Riemann) de a à b de f* : $\displaystyle\int_a^b f \overset{syn}{=} \int_a^b f(t)dt.$

C. — *Ces intégrales de Riemann vérifient :*

(1) La relation de Chasles et les propriétés de linéarité et positivé qui ont été admises en terminale pour l'intégrale des fonctions continues et, si f est à valeurs dans $[0, +\infty[$, est l'« aire de la région sous le graphe entre a et b » :

$$\{(t, y) \in I \times \mathbf{R}\,;\, a \leq t \leq b, 0 \leq y \leq f(t)\}$$

(2) Les fonctions continues[2]satisfont à la condition de Riemann.

(3) Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue et $x_0 \in I$ alors $F : I \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{array}{ll} \text{si } x > x_0 & F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \\ & F(x_0) = 0 \\ \text{si } x < x_0 & F(x) = -\int_{x}^{x_0} f(t)dt \overset{Def}{=:} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array}$$

est une[3]primitive de f s'annulant en x_0. (on ré-obtiendra ainsi le résultat B.)

Avant ceci, indépendamment des résultats B, C ci-dessus, on développera le

A. — *Calcul des primitives des « fonctions usuelles »*. Ce calcul n'utilise que des

« propriétés formelles de la dérivation des fonctions dérivables », vues en terminale, et qui seront rappelées ici (en Mat122) et rigoureusement établies en Mat121.

Ce calcul des primitives permet d'obtenir les valeurs des

« intégrales de fonctions usuelles $f : I \to \mathbf{R}$ ayant une primitive[4]$F : I \to \mathbf{R}$ » définies, si $a, b \in I$ par

$$\int_a^b f \overset{syn}{=} \int_a^b f(t)dt \overset{Def}{:=} F(b) - F(a) \overset{Def}{=:} [F]_a^b$$

Les « fonction usuelles » considérées (polynômes, fractions rationnelles définies sur I, fonctions trigonométriques...) étant toutes continues, cette définition donnera, d'après (2) et (3) de C, les intégrales de Riemann de ces fonctions usuelles.

---

[1] *c. a d.* si les fonctions $f, g : I \to \mathbf{R}$ vérifient la condition de Riemann et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ alors $\lambda f + \mu g, \max(f, g), \min(f, g) : I \to \mathbf{R}, (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x), \max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$, $\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$ satisfont aussi à la condition de Riemann.

[2] mais il y a des fonctions non-continues y satisfaisant aussi (et pouvant donc être intégrées).

[3] en fait la, car la différence de deux primitives d'une fonction sur un intervalle est constante.

[4] *c. a d.* f est une fonction usuelle dérivée d'une fonction dérivable F.