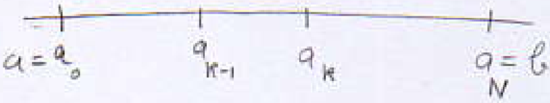
13/02/2008

$[a,b]\subset[x,y]$ $f:[x,y]\to\mathbb{R}$ bornée

α :



$\lambda=\inf_{t\in[a,b]} f(t) \leq l_k=\sup_{t\in]a_{k-1},a_k[} f(t)\leq l=\sup_{t\in[a,b]} f(t)$

$e_k=a_k-a_{k-1}$

$l'_k=\sup_{t\in]a_{k-1},a'[} f(t)$, $l''_k=\sup_{t\in]a',a_k[} f(t)\leq l_k$

$$L_\alpha(a,b)\ \left(=L_\alpha(a,b;f)\right)=\sum_{k=1}^{N} l_k\cdot e_k=\sum_{k=1}^{N}\sup_{t\in]a_{k-1},a_k[} f(t)(a_k-a_{k-1})$$

Proposition i) $\lambda\cdot(b-a)\leq L_\alpha(a,b)\leq l\cdot(b-a)$

ii) Si $\alpha'\prec\alpha$ $L_{\alpha'}(a,b)\leq L_\alpha(a,b)$

$$\text{pv i) } \lambda\cdot(b-a)=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{N}e_k=\sum_{k=1}^{N}\lambda\cdot e_k\leq\overbrace{\sum_{k=1}^{N} l_k\cdot e_k}^{L_\alpha(a,b)\ =}\leq\sum_{k=1}^{N} l\cdot e_k=l\sum_{k=1}^{N}e_k=l\cdot(b-a)\ \#$$

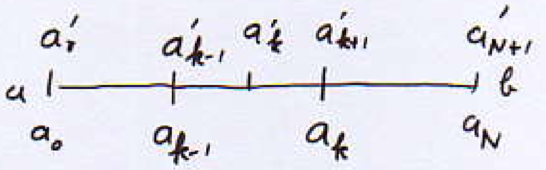
subdivisions élémentaires

ii) Comme (Prop. do1) si $\alpha'<\alpha$ $\alpha'=\alpha^{l}\prec_e\alpha^{l-1}\prec\dots\prec_e\alpha^0=\alpha$ o.p.s. $\alpha'\prec_e\alpha$

le point en plus de α' est $a'_k\in]a_{k-1},a_k[$

$$L_{\alpha'}(a,b)=\sum_{i=1}^{N+1} l'_i\cdot e_i=\sum_{j=1}^{k-1} l_j\cdot e_j+\underbrace{l'_k(a'_k-a_{k-1})+l''_k(a_k-a'_k)}_{\leq}+\sum_{h=k+2}^{N+1} l_{h-1}e_{h-1}$$

$$l_k(a'_k-a_{k-1}+a_k-a'_k)=l_k(a_k-a_{k-1})\ \#$$



On note $A(a,b)$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$

et $A_N(a,b)$ celui des subdivisions d'ordre N.

définition L'intégrale supérieure de f sur $[a,b]$ est

$$L(a,b) = \inf_{\alpha \in A(a,b)} L_\alpha(a,b)$$

La borne inf existe car $\{L_\alpha(a,b) ; \alpha \in A(a,b)\}$ est non vide minoré par $\lambda.(b-a)$

Remarque $L(a,b) = \inf_{N \in \mathbb{N}^*} \inf_{\alpha \in A_N(a,b)} L_\alpha(a,b)$ Exercice 1

Si on est capable de déterminer la borne inférieure parmi les subdivisions d'ordre donné, on est ramené à la borne inférieure d'une suite. C'est en fait sa limite car la suite est décroissante Exercice 2

Théorème i) $\lambda.(b-a) \leq L(a,b) \leq \ell.(b-a)$

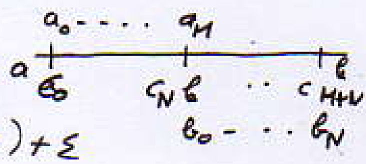
Relation de Chasles ii) si $x \leq a < b < c \leq y$ $L(a,c) = L(a,b) + L(b,c)$

produit de ii) de Prop. pour ii) il suffit d'établir pour tout $\varepsilon > 0$

(1) $L(a,c) \leq L(a,b) + L(b,c) + 2\varepsilon$

(2) $L(a,b) + L(b,c) \leq L(a,c) + \varepsilon$

(1) Soit α : $a = a_0 < \dots < a_M = b$ t.q. $L_\alpha(a,b) \leq L(a,b) + \varepsilon$



β : $b = b_0 < \dots < b_N = c$ t.q. $L_\beta(b,c) \leq L(b,c) + \varepsilon$

$\gamma = \alpha * \beta$ $a = c_0 < \dots < c_k = a_k < \dots < c_M = b < \dots < c_{M+h} = b_h < \dots \leq c_{M+N} = c$

$$L(a,c) \leq L_\gamma(a,c) = \sum_{h=1}^{M+N} \ell_h(\gamma) e_h(\gamma) = \sum_{j=1}^{M} \ell_j(\alpha) e_j(\alpha) + \sum_{h=1}^{N} \ell_h(\beta) e_h(\beta)$$

$$= L_\alpha(a,b) + L_\beta(b,c) \leq L(a,b) + L(b,c) + 2\varepsilon \quad \neq$$

(2) Soit $\gamma : a = c_0 < \dots < c_p = c$ t.q. $L_\gamma(a,c) \leq L(a,c) + \varepsilon$

Si $\gamma^1 = \gamma \cup \{b\}$, soit $\gamma' = \gamma$, soit $\gamma^1 \prec_e \gamma$ donc $L_{\gamma^1}(a,c) \leq L_\gamma(a,c) \leq L(a,c) + \varepsilon$

et si $b = c^1_M$, $M < P = M+N$ et $\alpha = \underset{a_0}{c^1_0} < \dots < \underset{a_M}{c^1_M} = b$ $\beta : \underset{b_0}{c^1_M} < \dots < \underset{b_N}{c^1_{M+N}} = c$ on a $\gamma^1 = \alpha * \beta$

$$L(a,b) + L(b,c) \leq L_\alpha(a,b) + L_\beta(b,c) \underset{\text{pv de }(1)}{=} L_{\gamma^1}(a,c) \leq L(a,c) + \varepsilon \quad \#$$

<u>Proposition</u> Soit $F, G : [x,y] \to \mathbb{R}$, $F(x) = 0$, si $x < t$, $F(t) = L(a,t)$; $G(y) = 0$ si $t < y$ $G(t) = -L(t,b)$

Si f est continue en $t_0 \in [x,y]$ alors F et G sont dérivables en t_0 et

$$F'(t_0) = f(t_0) = G'(t_0)$$

pv si $t \in [x,y]$ $t_0 < t$ $L(x,t) = L(x,t_0) + L(t_0,t)$: $F(t) - F(t_0) = L(t_0,t)$
$L(t_0,y) = L(t_0,t) + L(t,y)$: $G(t) - G(t_0) = L(t_0,t)$ (1)

si $t < t_0$ $L(x,t_0) = L(x,t) + L(t,t_0)$ $F(t) - F(t_0) = -L(t,t_0)$
$L(t,y) = L(t,t_0) + L(t_0,y)$ $G(t) - G(t_0) = -L(t,t_0)$ (2)

Comme f est continue en t_0 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q.

$\forall t \in [x,y]\quad t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta \Rightarrow f(t_0) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(t_0) + \varepsilon$

donc, si $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta \quad (f(t_0) - \varepsilon)(t - t_0) \leq L(t_0, t) \leq (f(t_0) + \varepsilon)(t - t_0)$ (3)

et si $t_0 - \delta \leq t \leq t_0 \quad (f(t_0) - \varepsilon)(t_0 - t) \leq L(t, t_0) \leq (f(t_0) + \varepsilon)(t_0 - t)$

soit $\quad (f(t_0) + \delta)(t - t_0) \leq -L(t, t_0) \leq (f(t_0) - \delta)(t - t_0)$ (4)

reportant (3) dans (1) et (4) dans (2) on obtient

si $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$

$$\begin{array}{ccccc} f(t_0)(t-t_0) - \delta(t-t_0) & \leq & F(t) - F(t_0) & \leq & f(t_0)(t-t_0) + \delta(t-t_0) \\ \| & & \| & & \| \\ f(t_0)(t-t_0) - \delta|t-t_0| & & G(t) - G(t_0) & & f(t_0)(t-t_0) + \delta|t-t_0| \end{array}$$

et si $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$

$$\begin{array}{ccccc} f(t_0)(t-t_0) + \delta(t-t_0) & \leq & F(t) - F(t_0) & \leq & f(t_0)(t-t_0) - \delta(t-t_0) \\ \| & & \| & & \| \\ f(t_0)(t-t_0) - \delta|t-t_0| & & G(t) - G(t_0) & & f(t_0)(t-t_0) + \delta|t-t_0| \end{array}$$

qui est la [bonne!] définition de F et G sont dérivable en t_0 avec $F'(t_0) = f(t_0) = G'(t_0)$ #

Rappel (dans le feutre de Mat121V!) Si $f :]u,v[\to \mathbb{R}$ est continue alors $\forall x < y \in]u,v[\ f_{|[x,y]}$ est bornée ($\exists m, M$ t.q. $\forall t \in [x,y]\ m \leq f(t) \leq M$)

$\boxed{\text{Corollaire}}$ 1) Si f est continue sur $[x,y]$ alors F et G sont des primitives de f [F est celle t.q. $F(x)=0$ et G celle t.q. $G(y)=0$]

2) Si $f :]u,v[\to \mathbb{R}$ est continue et $x_0 \in]u,v[$ alors

$$F :]u,v[\to \mathbb{R}, \quad t<x_0 \ F(t) = -L(t,x_0) ; \ F(x_0)=0 ; \ t>t_0 \ F(t) = L(t_0,t)$$

est la primitive de f s'annulant en t_0

Applications 1) $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $f(t) = \frac{1}{t}$ est continue

le cor. avec $x_0 = 1$ définit $F = \log :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

Exercice 3 En considérant la subdivision d'ordre N qui, parmi les subd^n d'ordre N minimise $L_2(1,x,f)$ (ce n'est pas la subdivision régulière d'ordre N!) on obtient si $x \geq 1$

$$\log(x) = \lim_{N\to+\infty} N(x^{1/N}-1)$$

Remarque ceci peut aussi servir de déf^n de log et on peut ainsi établir les propriétés de log (continue, $\log(ab) = \log(a) + \log(b) \ldots$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est continue, le cor. avec $t_0 = 0$ définit

$$F = \operatorname{Arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$