16/01/2007

Intégration

A Calcul des primitives des fonctions usuelles

1 "Rappels de calcul différentiel"

liste des propriétés de la dérivation des fonctions dérivables qui sont utilisées pour le calcul des primitives.
Ici on prendra ces propriétés comme «Axiomes» les définitions de dérivable, fonction dérivée, .. et les preuves de ces propriétés, partiellement vues en terminale seront données en Mat 121

Soit I, J des intervalles réels

à $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable on associe sa dérivée $f': I \to \mathbb{R}$

<u>Proposition</u> 1 (0) . Une fct. constante $f_c : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto c \end{matrix}$ est dérivable et $f_c' = 0 : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 0 \end{matrix}$

. L'inclusion $i : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{matrix}$ est dérivable et $i' = 1 (= f_1) : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 1 \end{matrix}$

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

Linéarité de la dérivation (1) $\lambda f + \mu g : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda f(t) + \mu g(t) \end{matrix}$ est dérivable et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda f'(t) + \mu g'(t) \end{matrix}$

Formule de Leibnitz (2) $f \cdot g : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) g(t) \end{matrix}$ est dérivable et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f g' : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f'(t) g(t) + f(t) g'(t) \end{matrix}$

(3) Si $\forall t \in I \; g(t) \neq 0$ $\frac{f}{g} : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(t)}{g(t)} \end{matrix}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f'(t) g(t) - f(t) g'(t)}{g(t)^2} \end{matrix}$

<u>Remarques</u> a) (1) (et (0)) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} ; f \text{ dérivable} \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \}$ et la dérivée $D : \begin{matrix} \mathcal{D}(I) \to \mathcal{F}(I) \\ f \mapsto f' \end{matrix}$ est linéaire.

b) Exercice (1) : En admettant dans (3) la dérivabilité de $\frac{f}{g}$ la formule pour $\left(\frac{f}{g}\right)'$ découle de la formule de Leibnitz (2)

Proposition 2 Soit $\varphi : J \to I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables alors

dérivation des fcts composée (1) $f \circ \varphi : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\varphi(t))$ est dérivable et $(f\circ\varphi)' = (f'\circ\varphi) \times \varphi' : J \to \mathbb{R},\ t \mapsto f'(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$

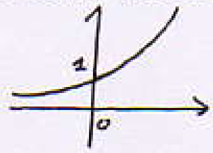
dérivation des fonctions réciproques. (2) Si φ est bijective et $\forall t \in J\ \varphi'(t) \neq 0$ alors $\varphi^{-1} : I \to J$ est dérivable et

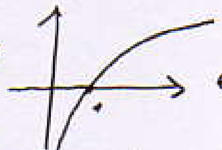
$$\forall t \in J \quad (\varphi^{-1})'(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Remarque dans (2) on a $Id_J = \varphi^{-1} \circ \varphi$ donc, en admettant la dérivabilité de φ^{-1}, par (1)

$$\forall t \in J \quad 1 = Id_J'(t) = \varphi^{-1\prime}(\varphi(t)) \times \varphi'(t) \text{ donc } \varphi'(t) \neq 0 \text{ et } \varphi^{-1\prime}(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

⚠ La condition $\varphi'(t) \neq 0$ dans (2) est donc nécessaire et la formule dans (2) pour la dérivée de φ^{-1} découle de la dérivabilité de φ^{-1} et de (1)

Exemples a) $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$  est dérivable, bijective et $\exp' = \exp$ donc

$\log \stackrel{def}{:=} \exp^{-1} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$  est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}\ \log'(\exp(t)) = \dfrac{1}{\exp(t)}$

ainsi $\forall x \in]0,+\infty[\ \log'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad (x = \exp(t))$ **Exercice ②** m̂ chose en supposant que l'on a d'abord défini log.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $P_\alpha(t) = \exp(\alpha \log t) = e^{\alpha \log t}$ $(=: t^\alpha)$

la composée de $t \mapsto \alpha \log t$ et $x \mapsto e^x$, est dérivable et

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad P_\alpha'(t) = \exp'(\alpha \log t) \times \alpha \log'(t) = \exp(\alpha \log t) \times \alpha \times \frac{1}{t} = e^{\alpha \log t} \times \alpha \times e^{-\log t} = \alpha e^{\alpha \log t - \log t}$$

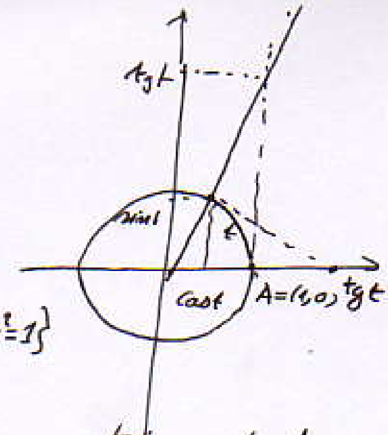
$$= \alpha e^{(\alpha-1)\log t} = \alpha t^{\alpha - 1}$$

Exercice ③ (le cas $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ par récurrence sur $|n|$ avec Leibnitz)

Théorème Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable alors f est croissante (resp. décroissante)

ssi $\forall t \in I\ f'(t) \geq 0$ (resp. $\forall t \in I\ f'(t) \leq 0$)

En particulier f est constante ssi $f' = 0 : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto 0$ $(\forall t \in I\ f'(t) = 0)$



2 Fonctions circulaires et leurs fonctions réciproques

Les fonctions cos, sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont "définies" par

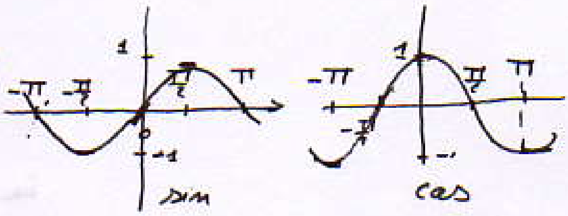
$M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est le point du cercle unité $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2+y^2=1\}$

à distance t, ~~dans~~ le cercle orienté dans le sens trigonométrique de A
(raison des " " autour de défini)

<u>Rmq</u> Pb on n'a pas défini la longueur d'une courbe (ici arc de cercle)

Elles sont 2π périodiques : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\cos(t+2\pi) = \cos(t)$; $\sin(t+2\pi) = \sin(t)$

et dérivables de dérivée $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

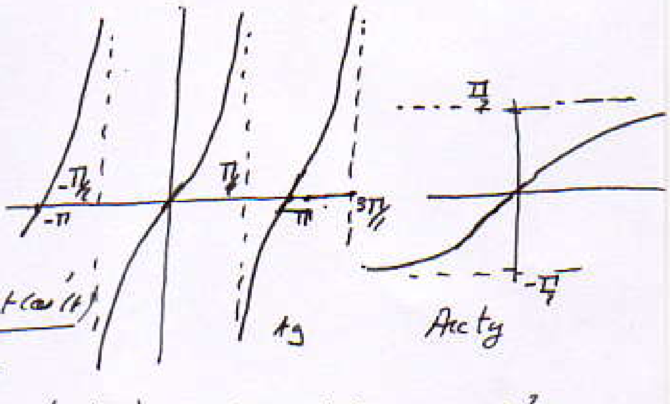


on a $\sin^{-1}(0) = \{n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$

$\cos^{-1}(0) = \left\{\frac{2n+1}{2}\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$ Exercice 4 $\begin{cases} \cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin' = \cos \end{cases} \Rightarrow \cos' = -\sin$

La fonction $tg : \mathbb{R} \setminus \cos^{-1}(0) \to \mathbb{R}$, $tg\, t = \frac{\sin t}{\cos t}$

induit une bijection $tg :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$



dérivable et $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \cos^{-1}(0)$ $tg'(t) = \frac{\sin'(t)\cos t - \sin t \cos'(t)}{\cos^2 t}$

$= \frac{\cos(t)\cos t - \sin t(-\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + tg^2(t)$
$= \frac{1}{\cos^2 t}$

donc la bijection réciproque $Arctg : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable

de dérivée $Arctg' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $Arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $(x = tg\, t)$

De même sin et cos induisent des bijections $\sin_| : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$
$\cos_| : [0, \pi] \to [-1, 1]$

de bijections réciproque $Arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $Arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

Arccos, Arcsin ~~est~~ dérivable sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[$ $Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $Arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

<u>Exercice 5</u>

3 Primitives

Soit I un intervalle réel

définition et proposition Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ admet une primitive $F: I \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et $F' = f$.

En ce cas si F_1 est une autre primitive de f ssi $F_1 - F$ est constante. ■

Si $a, b \in I$ on note alors $\int_a^b f \overset{syn}{=} \int_a^b f(t)\,dt \overset{def}{:=} F(b) - F(a) \overset{def}{=:} [F]_a^b$

Remarque pour calculer ces intégrales (variations de primitive) il suffit (parfois) de « lire à l'envers » les tables de dérivation et/ou d'appliquer la linéarité de la dérivation : si F et $G: I \to \mathbb{R}$ sont primitives de $f, g: I \to \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda F + \mu G$ est primitive de $\lambda f + \mu g$.

Exemples a) $\int_a^b \cos t\, dt = [\sin t]_a^b$; $\int_a^b \sin t = [-\cos t]_a^b$

b) $n \in \mathbb{N}$ $\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$ c) $0 < a, b$ $\int_a^b \frac{1}{x} dx = [\log x]_a^b = \log\left(\frac{b}{a}\right)$

d) $0 < a, b$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\int_a^b x^\alpha = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b$. e) $\int_a^b \alpha x^2 + \beta x + \gamma\, dx = \left[\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right]_a^b$

Proposition 1 (changement de variable) Soit $\varphi: J \to I$ dérivable et $f: I \to \mathbb{R}$ admettant une primitive F alors $g: J \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$ admet $F \circ \varphi$ comme primitive, ainsi

$$\forall a, b \in J \quad \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

$$[F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(a)) - F(\varphi(b)) = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

Exemple Soit $u, v, w \in \mathbb{R}$ avec $uw \neq 0$ ($u \neq 0 \neq w$) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{u^2x^2 + 2uvx + v^2 + w^2}$

Comme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{ux+v}{w}$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi'(x) = \frac{u}{w}$ et

$$f(x) = \frac{1}{(ux+v)^2 + w^2} = \frac{1}{w^2 + (ux+v)^2} = \frac{1}{wu} \frac{1}{1 + \left(\frac{ux+v}{w}\right)^2} \times \frac{u}{w} = \frac{1}{wu} \mathrm{Arctg}'(\varphi(x)) . \varphi'(x)$$

la fonction $F = \frac{1}{wu} \mathrm{Arctg} \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{wu} \mathrm{Arctg}\left(\frac{ux+v}{w}\right)$ est une primitive de f

⚠ plutôt que d'apprendre par cœur la formule, refaire le calcul [souvent pour qu'il devienne automatique (on sait $17 \times 11 = 187$ sans avoir appris la table des 11 quand on a automatisé $\begin{array}{r} 17 \\ \times 11 \\ \hline 17 \\ 17 \end{array}$!]

Exercice ⑥

Proposition (intégration par partie) Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec g dérivable, f admettant une primitive $F : I \to \mathbb{R}$ et $F.g'$ admettant une primitive

Alors $f.g$ admet une primitive et, si $a, b \in I$ on a

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \Big[Fg\Big]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t)\,dt$$

par (2) de Prop 1 de A.1

pv $F.g$ est dérivable et $(Fg)' = F'g + Fg'$ donc $f.g = (Fg)' - Fg'$ admet une primitive ∎ (1) de Prop 1 de A.1

Exemple $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_a^b \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \times \left(-\frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{1+x^2} \times \left(-\frac{x}{2}\right)\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{2}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Arctg}\, x - \frac{x}{1+x^2}\right]_a^b$$

Corollaire $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_a^b \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_a^b \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

$$\Big[\mathrm{Arctg}\, x\Big]_a^b - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Arctg}\, x - \frac{x}{1+x^2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Arctg}\, x + \frac{x}{1+x^2}\right]_a^b$$

Exercice ⑦ et ⑧

4. Primitives des fractions rationnelles.

Exemple 1 $\quad x \in]-1,1[\quad f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \; f(t) = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right]$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right] dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt + \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\operatorname{Log}(1+t) - \operatorname{Log}(1-t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^x = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \#$$

Exemple 2 $\quad x \in]-1,+\infty[\quad g :]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \quad g(t) = \frac{3t^2+3t+2}{t^3+t^2+t+1} = \frac{t^2+1+(2t+1)(t+1)}{(t^2+1)(t+1)}$

$$= \frac{1}{t+1} + \frac{2t+1}{t^2+1} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}$$

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} + \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \Big[\log(t+1) + \log(t^2+1) + \operatorname{Arctg}(t)\Big]_0^x = \Big[\operatorname{Log}(t+1)(t^2+1) + \operatorname{Arctg} t\Big]_0^x = \operatorname{Log}(x^3+x^2+x+1) + \text{[illegible]} \quad \#$$

Exemple 3 $\quad x \in]-1,+\infty[\quad h :]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \quad h(t) = \frac{t^4+2t^3+5t^2+5t+3}{t^3+t^2+t+1}$

$$= t+1 + \frac{3t^2+3t+2}{t^3+t^2+t+1} = t+1+g(t)$$

$$\int_0^x h(t)\,dt = \int_0^x t+1+g(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^x + \int_0^x g(t)\,dt \quad \text{et par exemple 2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \operatorname{Log}(x^3+x^2+x+1) + \operatorname{Arc\,tg}(x)$$

Pour obtenir $h(t) = t+1+g(t)$

on a effectué la «division euclidienne»

du numérateur $t^4+2t^3+5t^2+5t+3$

par le dénominateur t^3+t^2+t+1 de la fraction rationnelle $h(t) = \frac{t^4+2t^3+5t^2+5t+3}{t^3+t^2+t+1}$

$$\begin{array}{l|l} t^4+2t^3+5t^2+5t+3 & t^3+t^2+t+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^4+t^3+t^2+t} & t+1 \\ t^3+4t^2+4t+3 & \\ \underline{t^3+t^2+t+1} & \\ 3t^2+3t+2 & \end{array}$$

donc $t^4+2t^3+5t^2+5t+3 = (t^3+t^2+t+1)(t+1)+3t^2+3t+2$