Exercices de cours 9 (26 mars 2008)
Lois de composition sur un ensemble

2 Propriétés d'une loi de composition

1) Soit X un ensemble muni d'une loi $\cdot$ qui est associative et a un élément neutre. Prouver que si tout $x \in X$ a un inverse à gauche, *c. a d.* un $x' \in X$ tel que $x' \cdot x = e$ alors cet inverse à gauche x' est inverse de x [considérer l'inverse à gauche x'' de x'.]

2) Pour tout complexe $a \in \mathbf{C}, |a| = 1$ de module un soit $f_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, f_a(z) = a\overline{z}$.
a) Déterminer l'application composée $f_a \circ f_a$.
b) En déduire si $a' \in \mathbf{C}, |a'| = 1$ que $f_a \circ f_{a'}$ est bijective d'inverse $f_{a'} \circ f_a$.
c) Soit $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$ tels que $a = e^{i2\theta}, a' = e^{i2\theta'}$ et $t \in \mathbf{R}$. Déterminer $f_a(te^{i\theta})$ et exprimer, si $z \in \mathbf{C}$ l'image $f_a \circ f_{a'}(z)$ en fonction de θ et θ'.
d) A partir de c) retrouver b) et interpréter géométriquement $f_a, f_{a'}$ et $f_a \circ f_{a'}$.

3) Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ a) Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ sont inversible, déterminer leurs inverses et leur produit.
b) En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

4) Soit X un ensemble muni d'une loi $\cdot$ ayant un élément neutre e et $x \in X$ inversible d'inverse x^{-1}. Vérifier que $c_x : X \to X, c_x(y) = x \cdot y \cdot x^{-1}$ est un isomorphisme d'inverse $c_{x^{-1}}$. Reprendre avec ce langage l'exercice **6)** de la feuille précédente.

5) Soit A un ensemble muni de deux lois $\perp$ et $\cdot$ telles que $\cdot$ a un neutre noté 1 et est distributive par rapport à $\perp$ et soit $a, b \in A$.
a) Etablir $(a \perp b) \perp (a \perp b) = (a \perp b) \cdot (1 \perp 1) = (a \perp a) \perp (b \perp b)$.
b) En déduire que si $\perp$ est une loi de groupe alors $\perp$ est commutative.

L'intégrale de Riemann

5 Conséquences de condition et définition de Riemann

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann telle qu'il y a $c > 0$ tel que pour tout t de $[a, b]$ on a $|f(t)| \geq c$. Prouver que $\frac{1}{f} : [a, b] \to \mathbf{R}, t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ est intégrable au sens de Riemann [on prouvera qu'elle vérifie la condition de Riemann.]

2) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, f(0) = 0$ et si $t \neq 0, f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et $x \in]0, +\infty[$. Soit $\alpha : 0 = a_0 < \cdots < a_N = x$ est une subdivision de $[0, x]$.
a) La fonction f est-elle intégrable au sens de Riemann?
b) Prouver que $\Lambda_\alpha(0, x; f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\sqrt{a_k}}(a_k - a_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{N} \sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}} = \sqrt{x}$.

3) Soit $\epsilon > 0$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(0) = 0$ et si $t \neq 0, f(t) = |t|^{1+\epsilon} \sin \frac{1}{t}$. Prouver que
a) f est dérivable et que sa dérivée f' est continue si et seulement si $\epsilon > 1$.
b) f' est intégrable au sens de Riemann si et seulement si $\epsilon \geq 1$.

4) Soit $0 < X < Y$. Par intégration par partie vérifier que $\left| \displaystyle\int_X^Y \frac{\cos(x)}{x} dx \right| \leq \frac{2}{X}$