Corrigé de l'examen du 20 Mai 2008

A1

a): non; **b)** : oui; **c)** : oui; **d)** : oui; **e)** : non; **g)** : non.[1]

A2

h) Il suffit de vérifier que fg vérifie la condition de Riemann :
Si $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$ est une subdivision de $[a,b], e_i = a_i - a_{i-1}$ et $s_i(fg)$ l'oscillation de fg sur $[a_{i-1}, a_i]$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que si $e(\alpha) = \max e_i \leq \delta$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} s_i(fg)e_i \leq \epsilon$.

Etant Riemann-intégrables f et g sont sont bornées : il y a $M > 0$ tel que pour tout $t \in [a,b]$ on a $|f(t)|, |g(t)| \leq M$ et vérifient la condition de Riemann :

pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que si $e(\alpha) \leq \delta$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} s_i(f)e_i \leq \frac{\epsilon}{2M}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} s_i(g)e_i \leq \frac{\epsilon}{2M}$.

Affirmation $s_i(fg)\ [\overset{Def}{=} \max\limits_{u,v\in[a_{i-1},a_i]} |fg(u) - fg(v)|\,]\ \leq M[s_i(f) + s_i(g)]$

preuve : Si $u, v \in [a_{i-1}, a_i]$ on a $|fg(u) - fg(v)| = |f(u)g(u) - f(u)g(v) + f(u)g(v) - f(v)g(v)| \leq$
$\leq f(u)||f(u) - f(v)| + |f(u) - f(v)||g(v) \leq M[s_i(g) + s_i(f)]]$.
Donc si $e(\alpha) \leq \delta$ on a :

$$\sum_{i=1}^{N} s_i(fg)e_i \leq \sum_{i=1}^{N} [M(s_i(f) + s_i(g))]e_i \leq M\Big[\sum_{i=1}^{N} s_i(f)e_i + \sum_{i=1}^{N} s_i(g)e_i\Big] \leq M2\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$$

et fg satisfait à la condition de Riemann.

B1

i) L'algorithme d'Euclide donnant pgcd et identité de Bezout est dans ce cas :

527	391	136	119	17	0
		$= 527 - 391$	$= 391 - 2 \cdot 136$	$= 136 - 119$	$= 119 - 7 \cdot 17$
1	0	1	-2	3	-23
		$= 1 - 0$	$= 0 - 2 \cdot 1$	$= 1 - (-2)$	$= -2 - 7 \cdot 3$
0	1	-1	3	-4	31
		$= 0 - 1$	$= 1 - 2 \cdot (-1)$	$= -1 - 3$	$= 3 - 7 \cdot (-4)$

Le pgcd de 527 et 391 est donc 17, et l'identité de Bezout : $17 = 3 \cdot 527 - 4 \cdot 391$ $(= 1581 - 1564)$.
[La dernière colonne donnant les factorisations $391 = 17 \cdot 23$ et $527 = 17 \cdot 31$.]

j) $9 \cdot 391 + (-8) \cdot 437 = 3519 - 3496 = 23$.

k) 23 divise $391 = 23 \cdot 17$ et $437 = 23 \cdot 19$ et $23 = 9 \cdot 391 + (-8) \cdot 437$ multiple du pgcd $(391, 437)$, donc $23 = (391, 437)$ et $9 \cdot 391 + (-8) \cdot 437 = 23$ est une identité de Bezout pour 391 et 427.

l1) $37 - 25 = 12$ non divisible par $23 = (391, 427)$ donc $(l1)$ n'a pas de solution.

l2) Comme $109 - 63 = 46 = 2 \cdot 23 = 2 \cdot (9 \cdot 391 + (-8) \cdot 437) = 18 \cdot 391 - 16 \cdot 437$ alors $7101 = 63 + 7038 = 63 + 18 \cdot 391 = 109 + 16 \cdot 437 = 109 + 6992$ est solution de $(l2)$ et toute autre en diffère par un multiple de $7429 = 19 \cdot 23 \cdot 17 = [437, 391]$, le ppcm de $437 = 19 \cdot 23$ et $391 = 23 \cdot 17$: L'ensemble des solutions de $(l2)$ est donc $\{7101 + k \cdot 7429 = (k+1) \cdot 7429 - 328\,;\ k \in \mathbf{Z}\}$.

m) Pour tout $x \in [0,1], 1 \leq k \leq 4; x^k \geq 0$ donc $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \geq 1$ donc non nul.
Comme $Q(x) = (x^2+1)(x^2+2x+1) = (x^2+1)(x+1)^2$ et, si $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x - 3$, on a $\frac{P(i)}{(1+i)^2} = \frac{2i-4}{2i} = 1 + 2i$ et $\frac{P(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-8}{2} = -4$ donc $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1+2x}{x^2+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{R(x)}{x+1}$
où $R(x)(x^2+1)(x+1) = P(x) - (2x+1)(x+1)^2 + 4(x^2+1) =$
$= x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x - 3 - (2x^2 + 5x^2 + 4x + 1) + 4x^2 + 4 = x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x^2+1)(x+1)$
et on a la décomposition $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1+2x}{x^2+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1} = \frac{1+2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + 1$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x - 3}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx = \Big[\mathrm{Arctg}x + \log\frac{x^2+1}{x+1} + \frac{4}{x+1} + x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1$$

---

[1] Justifications(non demandées!) f non bornée; **b)** si $t \in]0,1]$, g est dérivable en t et $g'(t) = f(t)$; **c)** g est croissante ; **d)** par le théorème des restes chinois, puisque $6 = 2 \cdot 3$ et 2 est premier à 3; **e)** si $(a,b) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, 6(a,b) = 0$ mais $6\overline{1} = \overline{6} \neq 0 \in \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$; **g)** $0 \notin \{m \in \mathbf{Z}\,;\ m \equiv 3 \bmod 6\}$.

n) Il y a, car $mu|v$ et $(2m+1)u|v$, des entiers k,l tels que $k(2m+1)u=v=lmu$ et, u étant positif, $k(2m+1)=lm$. Ainsi $m|k(2m+1)$ donc, $2m+1$ et m étant, car $1=2m+1-2\cdot m$, premiers entre eux, $m|k$ et il y a un entier h avec $k=hm$ d'où $v=hm(2m+1)u$ et $m(2m+1)u|v$.

o) 1) $p\cdot s=r\cdot q$. 2) On a $p\cdot q=p\cdot q$ donc $(p,q)\sim(p,q)$ et $\sim$ est réflexive. Si $(p,q)\sim(r,s)$ on a $p\cdot s=r\cdot q$ donc $r\cdot q=p\cdot s$ et $(r,s)\sim(p,q)$ donc $\sim$ est symétrique. Enfin si $(p,q)\sim(r,s)$ et $(r,s)\sim(t,u)$ alors $p\cdot s=r\cdot q$ et $r\cdot u=t\cdot s$ donc $r\cdot(u\cdot p)\cdot s=(r\cdot u)\cdot(p\cdot s)=(t\cdot s)\cdot(r\cdot q)=(r\cdot q)\cdot(t\cdot s)=r\cdot(q\cdot t)\cdot s$ donc $p\cdot u=u\cdot p=q\cdot t=t\cdot q$ et $(p,q)\sim(t,u)$ donc $\sim$ est transitive.
Etant réflexive, symétrique et transitive $\sim$ est une relation déquivalence[2].
3) Si $(p,q)\sim(1,s)$ on a $p\cdot s=1\cdot q=q$ donc $s|q$ et $p|q$.

p) $I(1,a)=\displaystyle\int_0^1(1-x)^{a-1}\,dx=\Big[-\frac{(1-x)^a}{a}\Big]_0^1=\frac{1}{a}$.

q) $I(b+1,a)=\displaystyle\int_0^1 x^b(1-x)^{a-b-1}\,dx=\Big[-\frac{x^b(1-x)^{a-b}}{a-b}\Big]_0^1+\int_0^1\frac{bx^{b-1}(1-x)^{a-b}}{a-b}\,dx=\frac{b}{a-b}I(b,a)$

r) Pour $b=1$ on a $u_b\overset{Def.}{=}\dfrac{1}{b\binom{a}{b}}=\dfrac{1}{1\binom{a}{1}}=\dfrac{1}{a}=I(1,a)$ et, si $b<a$

$u_{b+1}=\frac{(b+1)!(a-b-1)!}{(b+1)\cdot a!}=\frac{b!(a-b)!}{(a-b)\cdot a!}=\frac{1}{b-a}\dfrac{1}{\binom{a}{b}}=\frac{b}{b-a}\dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$. Ayant même valeur en $b=1$ et, pour $b<a$, vérifiant la même relation de récurence $I(b+1,a)[\text{resp. } u_{b+1}]=\frac{b}{a-b}\cdot I(b,a)[\text{resp. } u_b]$, les deux suites $I(b,a)$ et u_b sont, pour $1\le b\le a$ égales : $I(b,a)=u_b$.

s) $x\mapsto a(y-1)(1-x+yx)^{a-1}$ est la dérivée de $x\mapsto(1-x+yx)^a$ donc $x\mapsto a(y-1)(1-x+yx)^{a-1}$ est primitive de $x\mapsto(1-x+yx)^a$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 a(y-1)(1-x+yx)^{a-1}dx=\Big[(1-x+yx)^a\Big]_0^1=y^a-1$.

t) Développant, par la formule du binôme $a(y-1)(1-x+yx)^{a-1}$ et, par linéarité de l'intégrale :

$$(y-1)\sum_{b=1}^{a}y^{b-1}=y^a-1=\int_0^1 a(y-1)(1-x+yx)^{a-1}dx=$$
$$\int_0^1 a(y-1)\sum_{b=1}^{a-1}\binom{a-1}{b-1}(1-x)^{a-1-(b-1)}(yx)^{b-1}=(y-1)\sum_{b=1}^{a-1}a\binom{a-1}{b-1}I(b,a)y^{b-1}$$

Les polynômes $\sum_{b=1}^{a}Y^{b-1}$ et $\sum_{b=1}^{a-1}aI(b,a)Y^{b-1}$ ayant même valeur en tout $y\in[0,1[$ (une infinité de points) sont donc égaux et, pour $1\le b\le a$ on a $1=a\binom{a-1}{b-1}I(b,a)$ d'où le résultat.

u) $b\binom{a}{b}=b\dfrac{a!}{b!(a-b)!}=b\dfrac{a\cdot(a-1)!}{b\cdot(b-1)!(a-1-(b-1))!}=a\dfrac{(a-1)!}{(b-1)!(a-1-(b-1))!}=a\binom{a-1}{b-1}$.
C'est l'égalité des valeurs de $I(b,a)$ calculées en **r)** et **t)**.

v) $d_{n+1}=[d_n,n+1]$ donc $d_1=1,d_2=2,d_3=6,d_4=12,d_5=60,d_6=60,d_7=420,d_8=840$.

w) Si $n=2^{l-1}(2m-1)$ alors $2n=2^l(2m-1)$ et $d_{2n}=[d_{2n-1},2^l(2m-1)]$. Si $2^{l-1}=n\,(<2n)$ alors $2^{l-1}|d_{2n-1}$ et $2n=2^l|2d_{2n-1}$ et $d_{2n}=2d_{2n-1}$, car $2^l=2n>2n-1,2n\not|d_{2n-1}$.
Sinon $2^l<2n$ et $2m-1<2n$ donc $2n=2^l(2m-1)=[2^l,2m-1]|d_{2n-1}$ et $d_{2n}=d_{2n-1}$.

x) Si $1\le k\le n$ on a $k|d_n$ donc $\frac{d_n}{k}\in\mathbf{Z}$ et si $a_k\in\mathbf{Z}$ on a $d_n\displaystyle\int_0^1P(t)\,dt=d_n\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{d_n}{k}\in\mathbf{Z}$.

y) $P(X)=X^{b-1}(1-X)^{a-b}$ étant à coefficients entiers de degré inférieur à a, **x)** donne $c\in\mathbf{Z}$ avec $I(b,a)=\dfrac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}=\dfrac{1}{b\binom{a}{b}}=\frac{c}{d_a}$ d'où, si $a=2m+1,2m$ le résultat par **o**3) et $d_{2m}|d_{2m+1}$.

z) **y**) et **n**) avec $u=\binom{2m}{m}$, donnent $m(2m+1)\binom{2m}{m}|d_{2m+1}$. Donc $d_{2m+1}\ge m(2m+1)\binom{2m}{m}$.
Si $0\le k\le 2m$ on a $\binom{2m}{k}\le\binom{2m}{m}$ et, par **w)** $d_{2n-1}|d_{2n}$ d'où

$d_{2m+1}\ge m\displaystyle\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}=m2^{2m}=\frac{m}{2}2^{2m+1},\quad d_{2m}\ge d_{2m-1}\ge(m-1)2^{2(m-1)}=\frac{m-1}{4}2^{2m}$.

Donc si $m\ge 2,d_{2m+1}\ge 2^{2m+1}$, si $m\ge 5$, $d_{2m}\ge 2^{2m}$ soit $d_n\ge 2^n$ si $n=2m+1\ge 5$ ou $n=2m\ge 10$. Par **v)** c'est aussi vrai pour $n=8$ [mais ne l'est pas pour $n=1,2,3,4,6$].

---

[2] Ou si $f:\mathcal{N}\times\mathcal{N},f(p,q)=\frac{p}{q}$ la relation $\sim$ est $f^{-1}(=)$, une relation déquivalence sur $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$, puisque $=$ est une relation déquivalence sur $\mathbf{R}$.