08/10/2007

Rappels V vrai = démontré. non, ou (, et)

A faux $\overset{def}{=}$ non A vrai (F)

(*) A vrai alors A ou (non A) vrai (tiers exclu)

(* *) A vrai alors A ou B vrai

table de vérité

A	B	non A	A ou B	A et B
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

fonction (ou valeur) de vérité

$v_A = 1$ ssi A vrai

$v_A = 0$ ssi A faux

2.3 Implications et équivalences, A, B, C... désignent des énoncés corrects

définition L'implication A implique B, notée $A \Rightarrow B$

est l'énoncé B ou (non A)

A hypothèse (de $A \Rightarrow B$)

B conclusion)

sa table de vérité est

A	B	non A	$A \Rightarrow B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

En particulier si $A \Rightarrow B$ est vrai et A est vrai alors B est vrai

Exercice ① calculer la fct. de vérité

pour s'assurer qu'un énoncé est vrai

on peut donc prouver (la véracité d')une implication d'un énoncé vrai vers l'énoncé considéré

Synonymes : si A alors B ; A est suffisant pour B ; (A donc B)

② une implication $A \Rightarrow B$ peut être vraie sans que A le soit (son hypothèse)

Exercice ② Important pour vérifier un raisonnement indépendamment des hypothèses. (ou fautes de frappe)

Exemple Si n est un entier $(n > 0) \Rightarrow (n \geq 1)$ est vrai

contexte (théorie ds laquelle on raisonne)

(axiome)

N'ayant pas construit les entier on prend ce fait comme acquis

application Soit $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$ deux rationnels avec $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ ($s, q > 0$, p, q, r, s entiers)

alors $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} \left(= \frac{ps - qr}{qs} \right) \geq \frac{1}{qs}$

L'implication réciproque A est impliqué par B, notée $A \Leftarrow B$

est (non B) ou A

synonymes : B seulement si A ; A est nécessaire pour B ; A si B

Exemple Si x est réel et $\alpha > 0$ $(x > 0) \Leftarrow (x > \alpha)$ est vrai

L'équivalence A équivalent à B notée $A \Leftrightarrow B$

est $(A \Rightarrow B)$ et $(A \Leftarrow B)$

Remarque utilité de l'introduction de la définition et notation

plus clair que (B ou (non A)) et ((non B) ou A)

imaginez ceci où A et B sont remplacés par une ligne de calculs !

Exercice ③

Exemple Si n désigne un entier $(n > 0) \Leftrightarrow (n \geq 1)$ est vrai

mais $(n \geq 2) \Leftrightarrow (n > 0)$ ne l'est pas

⚠ on a bien $(n \geq 2) \Rightarrow (n > 0)$ mais pas $(n \geq 2) \Leftarrow (n > 0)$

Prudence ds les calculs mettre $\Leftrightarrow$ que quand il est vrai (et justifier qd il n'est pas immédiat) troisième principe de base

(∗∗∗) Si X, Y, Z sont trois énoncés et $X \Rightarrow Y$ vrai

alors $(X \text{ ou } Z) \Rightarrow (Y \text{ ou } Z)$ vrai

<u>Corollaire</u> (transitivité de $\Rightarrow$)

1° type de raisonnement : syllogisme

Si $(A \Rightarrow B)$, $(B \Rightarrow C)$ sont vrais alors $(A \Rightarrow C)$ est vrai

preuve (∗∗∗) avec $X = B$, $Y = C$ et $Z = \text{non} A$ donne

$$B \text{ ou } (\text{non} A) \Rightarrow C \text{ ou } (\text{non} A)$$

c.à.d. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. Comme $A \Rightarrow B$ vrai ; on a $A \Rightarrow C$ vrai. □

Exercice ④

on peut bien sûr "mettre bout à bout" des syllogismes (récurrence)

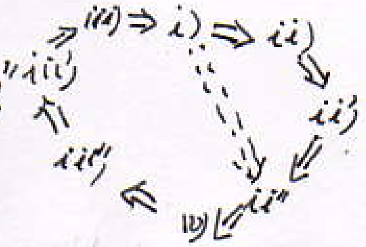
<u>Application</u> dans 7) de exos-cours2 montrer les équivalences de 8 énoncés

(traduisant le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire)

à priori il faut faire $\underbrace{2}_{\text{une paire } \Rightarrow \Leftarrow} \times \binom{8}{2} = 2 \times \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 56$ vérifications

"nb de paire d'énoncés.

par transitivité de $\Rightarrow$ il suffit de vérifier les 8 "implications en cercle"



Exercice ⑤

"trouver un bon cercle"

(un où toutes (sauf peut être une) les implications sont quasi immédiates

On apprend les (huit) tables $\times 2, \times 3, \ldots, \times 9$ bien que / (puisque $\times 4 = \times 2(\times 2)$)

il suffirait d'en apprendre quatre ($\times 2, \times 3, \times 5, \times 7$)

De m̃ il vaut mieux connaître ses "**tables de tautologies**":

<u>Proposition</u> Les équivalences suivantes sont vraies

(1) A ou $B \Leftrightarrow B$ ou A (2) A et $B \Leftrightarrow B$ et A

(3) A ou $(B$ ou $C) \Leftrightarrow A$ ou $(B$ ou $C)$ (3) A et $(B$ et $C) \Leftrightarrow (A$ et $B)$ et C

(5) A et $(B$ ou $C) \Leftrightarrow (A$ et $B)$ ou $(A$ et $C)$ (6) A ou $(B$ et $C) \Leftrightarrow (A$ ou $B)$ et $(A$ ou $C)$

(7) non(non $A) \Leftrightarrow A$ Double négation

(8) non $(A$ ou $B) \Leftrightarrow ($non $A)$ et $($non $B)$ (9) non $(A$ et $B) \Leftrightarrow ($non $A)$ ou $($non $B)$

<u>Remarque</u> i) (Voir Godement) tout (m̃ (*)) découle de (0) A ou $A \Rightarrow A$;

(1) ; (**) reformulé en $A \Rightarrow A$ ou B ; (***) reformulé en $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X$ ou $Z \Rightarrow Y$ ou $Z)$

pratiquement (pour nous) on vérifie par table de vérité ou calcul

ex: (7) $v_{\neg(\neg A)} = 1 - v_{\neg A} = 1 - (1 - v_{A}) = 1 - 1 + v_A = v_A$

coquille ds exos. cours 4

ii) (1) donne $(A \Leftarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$

$(A \Leftarrow B) = ($non $B)$ ou A ; $(B \Rightarrow A) = A$ ou $($non $B)$

iii) (7) et (9) donnent que et est redondant : on définit

$$A \text{ et } B = \text{non}\left((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B)\right)$$

m̃ rmq que pour ⇔ sur l'intérêt de remplacer ce fauté par (et)

2.4 Quelques types de raisonnements.

Corollaire (10) non $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$ et (non B)

(11) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non $A \Leftarrow$ non B)

définition un cas où A et (non B) vrai est un contre-exemple à A : on verra après plus précisément avec les quantificateurs

si $n=1$ alors $(n>0)$ et non $(n \geq 2)$:

contre-exemple à $(n>0) \Rightarrow (n \geq 2)$ donc $(n>0) \Rightarrow (n \geq 2)$ est FAUX □

Exercice 6

définition (non A) $\Leftarrow$ (non B) (ou (non B) $\Rightarrow$ (non A))

est la contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$

Souvent il est plus facile d'écrire la démonstration de la contraposée que celle de l'implication.

Cependant on écrit l'implication car c'est elle qui s'applique.

Exemple Si a et b sont des nombres $(ab \neq 0) \Rightarrow (b \neq 0)$ n'est pas si facile à justifier que $(ab=0) \Leftarrow (b=0)$

$[\, 0 = a.0 - a.0 = a.(0+0) - a.0 = a.0 + a.0 - a.0 = a.0 \,]$

Exercice 7

~~$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\text{non} A) \Rightarrow (\text{non} B))$~~ est une faute courante (et grave) bien que, psychologiquement (et statistiquement) fréquente.

(Lundi 01/10/2007 les étudiants étaient à l'heure au TD) donc (Lundi... le prof était en retard)

Cependant de (11) (et (1)) on déduit $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\text{non} A \Leftrightarrow \text{non} B)$

plus généralement si X est une "partie d'une proposition $P(x)$"

[et X peut prendre les valeurs $X = A$ et $X = B$] et $A \Leftrightarrow B$ alors $P(A) \Leftrightarrow P(B)$:

Dans un énoncé on peut remplacer une phrase par une phrase équivalente.

Exemple Soit z, z' deux complexes $z\bar{z}'$ réel $\Leftrightarrow \overline{z'\bar{z}} = z'\bar{z}$
$\Leftrightarrow \bar{z}'z = z'\bar{z}$

(Si $z'\bar{z}$ est réel alors $\det(z, z') = 0$)

donc (si $z'\bar{z} = \bar{z}'z$ alors $\det(z, z') = 0$.

$\boxed{2}$ Si par contre on a seulement $A \Rightarrow B$ on ne peut en général en déduire $P(A) \Rightarrow P(B)$ (la faute de plus haut)

Raisonnement au cas par cas : Si $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$ alors A ou $B \Rightarrow C$

En particulier si A ou B est vrai alors C est vrai

[souvent on prend $B = \text{non} A$]

Exemple pour tout entier n le nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ est entier

A ($n = 2m$ pair) : $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2m(2m-1)}{2} = m(2m-1)$ entier

$B = \text{non} A$: ($n = 2m+1$ impair) : $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2m+1)2m}{2} = (2m+1)m$ ——

Exercice (8)

Raisonnement par cas particulier X et $Y \Rightarrow X$ vrai (donc X et $Y \Rightarrow Y$ vrai)

PV : La contraposée de $\text{non} X \Rightarrow (\text{non} X)$ ou $(\text{non} Y)$ [pté (**) pour $A = \text{non} X$, $B = \text{non} Y$]

est $\text{non}(\text{non} X) \Leftarrow X$ et Y donc X et $Y \Rightarrow \text{non}(\text{non} X) \underset{(7)}{\Leftrightarrow} X$ ainsi X et $Y \Rightarrow X$
(syllogisme)

de même si $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ alors $A \Rightarrow B$ et C

Raisonnement "en traînant une valise" $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow [(Z \text{ et } X) \Rightarrow (Z \text{ et } Y)]$

Important de les reconnaître :

quand dans un raisonnement ou une suite de calculs une condition ou une équation reste inchangée (et n'est pas utilisée) à chaque étape. Au lieu de la recopier à chaque fois [au risque de la modifier par faute de copie (comme au jeu de cadavres exquis)] on ne la met qu'à la fin pour l'implication résultant (par syllogismes répétés) de tout le développement du calcul ou raisonnement.

Un exemple d'«analyse logique» : la recette pour obtenir les racines carrées d'un nombre complexe

$u = x + iy$ vérifie $u^2 = z = a + ib$ ssi A et B : $\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (A) \\ 2xy = b & (B) \end{cases}$

<u>Remarque</u> on écrit (dans les calculs) $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ pour A et B

pt crucial du raisonnement

$|z| = |u^2| \overset{\downarrow}{=} |u|^2$ prouve A et B $\Rightarrow$ C : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

[là où on utilise la déf $|u|^2 = u\bar{u}$ et $\overline{uu'} = \bar{u}\,\bar{u'}$ (pour avoir $|uu'| = |u||u'|$)]

en additionnant A et C $\Rightarrow$ D $2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2}$

pas traité par écrit

dans le cours (seulement oralement)

si $b \neq 0$ ou $a > 0$

A et B $\Rightarrow$ C donc A et B $\Rightarrow$ A et C $\Rightarrow$ $\begin{cases} D \\ B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2+b^2}} \\ y = \frac{b}{2x} \end{cases}$

A et B $\Rightarrow$ A

A et B $\Rightarrow$ B $\xrightarrow{\text{valise}}$ B

mais pas là

équivalence car

donc pour (sans savoir l'existence de la racine carrée) que le calcul est correct il faut vérifier qu'avec la sol^n on a A

2.5 Contradiction et raisonnement par l'absurde

déf. et proposition S'il y a un énoncé C contradictoire, c.a.d. à la fois vrai et faux

Alors tout énoncé A est vrai et faux (donc contradictoire)

pr. Si tout énoncé B est vrai alors ($B = \text{non} A$) tout énoncé A est faux.

- par (**) $\text{non} C \Rightarrow A \text{ ou non} C$ c.a.d. $C \Rightarrow A$

comme C est faux non c est vrai (définition de faux) donc $C \Rightarrow A$ est vrai

comme C est vrai A est vrai. ∎

On admet (que les règles de raisonnement permises sont faites en sorte) qu'il n'y a pas d'énoncé contradictoire.

[ce n'est pas démontré pour les mathématiques usuelles,

Le raisonnement par l'absurde pour montrer un énoncé E

consiste à adjoindre aux mathématiques l'énoncé non E

et obtenir un énoncé contradictoire donc $\text{non} E \Rightarrow E$ est vrai

ainsi $E \text{ ou} (\text{non} E) \Rightarrow E \text{ ou } E \Rightarrow E$ et comme E ou non E est vrai (*)

E est vrai

Exemple $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

si $\underbrace{\sqrt{2} = \frac{p}{q}}_{\text{(avec p et q premiers entre eux)}}$ alors $q^2 \times 2 = p^2$ donc 2 divise p^2 et, comme 2 premier

2 divise p c.a.d $p = 2k$ d'où $q^2 \times 2 = (2k)^2 = 2 \times 2 \times k^2$ et $q^2 = 2k^2$

donc 2 divise q^2 et 2 divise q contredisant p et q premiers entre eux

Exercice 9

<u>Remarque</u> pratiquement pour prouver (par l'absurde) $A \Rightarrow B$

on suppose A et non B et prouve non A

!! Dans bien des cas A n'est pas utilisé (une valeur parfois) et on a fait fait un raisonnement par contraposition

$$(\text{non } B \Rightarrow \text{non } A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$$

Il vaut mieux alors le rédiger au propre par contraposition car

- La rédaction est plus courte (pas de supposons que B est faux ...) plus claire
- Dans le cas où le raisonnement a des étapes intermédiaires les conclusions de ces étapes, étant établies sans "hypothèse d'absurde" pourront être réutilisées après (sauvegardée comme des lemmes)

Cependant commencer par chercher un raisonnement par l'absurde peut "aider à démarrer"!

Chapitre 2^{bis} Introduction à la théorie des ensembles

L'exemple de raisonnement erroné

"lundi dernier les étudiants étaient à l'heure en TD
donc le prof était en retard"

pour illustrer $(A \Rightarrow B) \not\Leftrightarrow (\text{non} A \Rightarrow \text{non} B)$

était très approximatif car si "en retard" est bien $\neg$(est à l'heure)

$\neg$(étudiant) n'est pas professeur

(par exemple un écolier, une craie, ... sont non(étudiants)

Le présupposé était "parmi les personnes devant à 10h15

être en salle 207" autrement dit la

définition de l'ensemble sur lequel on raisonnait

On ne va pas définir ce qu'est un ensemble mais

partie d'ensembles donnés (dont on connaît (et peut préciser) les propriétés

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$ ——— (relatifs)

$\mathbb{Q}$ ——— nombres rationnels

$\mathbb{R}$ ——— réels

$\mathbb{C}$ ——— complexes

$\mathcal{C}_a = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ens. des chiffres arabes

$\mathcal{A}_\ell = \{a, b, c, \ldots, z\}$ alphabet latin minuscule
(ens. des lettres...)

et préciser des manières (correctes) d'en former d'autres

(pour rester dans une théorie non contradictoire)

1. Les symboles $\in$, $\subset$ et $=$

On ne définit pas ce qu'est un ensemble
mais apprend à le décrire et manipuler ces symboles

La proposition x est élément de l'ensemble E se note $x \in E$
(ou appartient à)

sa négation x n'est pas élément de ———————— $x \notin E$
(son contraire) (ou n'appartient pas à

Remarque si un symbole exprime un énoncé
le même symbole rayé exprime la négation de cet énoncé

Exemple $\not<$ est non inférieur à, donc équivalent à $\geq$ (supérieur ou égal à)

Exemples $2 \in \mathbb{N}$; $-7 \notin \mathbb{N}$; $0{,}33\cdots (= \frac{1}{3}) \in \mathbb{Q}$; $0{,}101001000 1 \ldots \in \mathbb{R}$ $(\notin \mathbb{Q})$
$i \in \mathbb{C}$; $i \notin \mathbb{R}$

Exercice 10

définition Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$
si tout élément de E est élément de F : $(x \in E) \Rightarrow (x \in F)$
on dit alors que F contient E et note $F \supset E$

Exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Propriétés de $\subset$ (1) pour tout ensemble E on a $E \subset E$

(2) Si E et F sont deux ensembles on a $E = F$
si et seulement si $E \subset F$ et $E \supset F$

(3) Si E, F, G sont trois ensembles avec $E \subset F$ et $F \subset G$
alors on a $E \subset G$

n'ayant défini ce qu'est un ensemble on ne peut prouver ces propriétés. On les utilise comme règle de manipulation (de grammaire) de $\subset$

paraphrase de (2) deux ensembles sont égaux ssi ils ont mêmes éléments

[(tout élément de E est élément de F) et (tout élément de F est élément de F)]

Dans la pratique montrer l'égalité de deux ensembles est établir <u>deux</u> inclusions (comme une équivalence $\Leftrightarrow$ sont deux ($\Rightarrow$ et $\Leftarrow$) implications)

"On peut donc définir" un ensemble" par la liste de ses éléments

Exemple $C_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ l'ensemble des chiffres impairs

$\{2n ;\ n = 0, 1, 2, \dots\}$ ou $\{2n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.