Exercices de cours 4 : 1° Octobre 2007

§1.4D Equations algébriques.

§1.4F Angles orientés arguments et exponentielle complexe.

1) a) Déterminer la forme trigonométrique de $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b) En déduire la forme trigonométrique des racines cinquièmes[1] de j

2) a) Linéariser $\sin^2\theta\,\cos\theta$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^x \sin^2\theta\,\cos\theta\,d\theta$.
b) Déduire de $\cos\theta = \sin'\theta$ un calcul direct de l'intégrale $\int_0^x \sin^2\theta\,\cos\theta\,d\theta$.
c) Vérifier la cohérence des deux calculs en linéarisant $\dfrac{\sin^3 x}{3}$.

§2.1 Introduction.

3) Expliciter ce rappel de la définition du signe somme
et les hypothèses qui y sont sous-entendues (que sont p, q, a_k?)

4) Dresser la liste des définitions[2] et notations données jusqu'ici dans le cours et, par la suite tenir à jour un «glossaire de définitions et notations du cours».

5) Rappeler la preuve du cours de la première formule du triangle de Pascal, expliquer pourquoi elle ne s'applique pas aux coefficients du binôme généralisés et refaire **11)** de Exercices de cours1.

§2.2 Tables de vérité.

6) La *fonctions* v_A *de vérité de* l'énoncé A vaut $v_A = 1$ si A est vrai et $v_A = 0$ si A est faux.
A l'aide d'une table de vérité vérifier les formules $v_{\text{non}A} = v_{\neg A} = 1 - v_A$

$$v_{A\text{et}B} = v_{A\wedge B} = v_A \times v_B \qquad v_{A\text{ou}B} = v_{A\vee B} = v_A + v_B - v_A \times v_B$$

en déduire la plus symétrique $\qquad v_{A\text{ou}B} + v_{A\text{et}B} = v_{A\vee B} + v_{A\wedge B} = v_A + v_B$

§2.3 Implications et équivalences.

7) Soit deux énoncés X et Y. Calculer $v_{X\Rightarrow Y}$ en fonction de v_X et v_Y. En déduire une *preuve par calcul* de la transitivité de l'implication (on peut raisonner par syllogisme).

---

[1] *c.a d.* des z tels que $z^5 = j$

[2] mots à utiliser dans un sens précis [soulignés en petites vagues]

Résultats numériques, avec renvois aux énoncés du cours correspondant
de quelques exercices de Exercices de cours 3

1) $P(1+i) = 2(1-i) + 14i + 2(1-i) + 14i = 32i - 4 \neq 0$ (piège ou coquille ?)
[Comparez avec vos calculs (si vous ne les avez faits traitez cet exercice!)de **9)** de TD2.], mais $P(1-i) = 2(1+i) - 14i + 2(1+i) + 14i = 0$. Donc $P(X) = (X+i-1)Q(X)$
[par la proposition de 1.3" (10/09/2007)] avec [remarque 2 après la proposition de 1.3" (10/09/2007)]
$Q(X) = X^2 + (8-i)X + 7(1-i) = (X+i-1)(X+1-i)(X+7)$.
les solutions complexes de $P(X)=0$ sont $1-i, i-1, -7$ [-7 est réel mais un réel est un complexe!].

2) Non car pour tout réel x on a $x^2 \geq 0$ donc $P(x) \geq 0 + 4 \cdot 0 + 16 = 16 > 0$ positif donc non nul.
a) $P(1+i\sqrt{3}) = -8(1+i\sqrt{3}) + 8(i\sqrt{3}-1) + 16 = 0$
[Comparez avec vos calculs (si vous ne les avez faits traitez ces exercices!) de **10)** et **11)** de TD2.]
b) $Q(X) = X^2 + 2\Re e\,(1+i\sqrt{3})X + |1+i\sqrt{3}|^2 = X^2 + 2X + 4$
[par le corollaire de la proposition de 1.4D (17/09/2007)].
c) $P(X) = (X^2 + 2X + 4)(X^2 - 2X + 8)$

4) $1 - j = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, j - j^2 = i\sqrt{3}, j^2 - 1 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc
$|1-j|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3, |j-j^2|^2 = 3, |j^2-1|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$: les trois côtés sont de longueur $\sqrt{3}$.