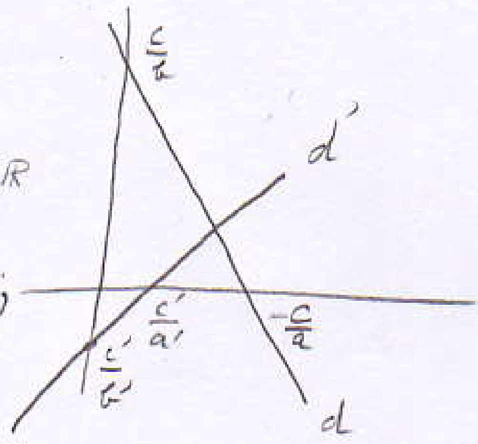
09/10/2006

Plan, espace et combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$

1 Intersection de deux droites dans le plan



$v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$; $v'=(a',b')\in\mathbb{R}^2$; $v\neq(0,0)\neq v'$; $c,c'\in\mathbb{R}$

$d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; ax+by=c\}$ droite d'équation

$d'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; a'x+b'y=c'\}$ droite d'équation

$$M=(x,y)\in d\cap d' \iff \begin{cases} ax+by=c & (E) \\ \text{(et) } a'x+b'y=c' & (E') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b'(E)-b(E') & b'ax+\cancel{b'by}-ba'x-\cancel{bb'y}=b'c-bc' \\ a(E')-a'(E) & \cancel{aa'x}+ab'y-\cancel{a'ax}-a'by=ac'-a'c \end{cases}$$

c.a.d
$$\begin{cases} (b'a-ba')\,x=b'c-bc' \\ (b'a-ba')\,y=ac'-a'c \end{cases}$$

d'où, si $b'a-ba'\neq 0$ les valeurs de x et y

si $(b'a-ba'=0)$ et $((b'c-bc'\neq 0)$ ou $(ac'-a'c\neq 0)$ impossible : $d\cap d'=\emptyset$

si $(b'a-ba'=0)$ et $(b'c-bc'=0)$ et $(ac'-a'c=0)$??

2 Déterminants dans le plan $\mathbb{R}^2$

Soit $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \overset{def}{=} ps - rq$

le déterminant du "tableau" $\quad \begin{matrix} p & q & \leftarrow t = (p,q) \in \mathbb{R}^2 \\ r & s & \leftarrow u = (r,s) \in \mathbb{R}^2 \\ \uparrow & \uparrow & \end{matrix}$

lu en lignes $p, q ; r, s$ $\quad \det_\ell(t, u)$

$v = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$

lu en colonnes $p, r ; q, s$ $\quad \det_c(v, w)$

Exemples a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 2 = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) 1) a établi : $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \right)$ et $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \right)$

(les (formules de Crammer)

<u>Propriétés</u> $\forall p, p', q, q', r, r', s, s', \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ en notant $t = (p, q)$, $t' = (p', q')$,

$u = (r, s)$, $u' = (r', s')$, $v = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} p' \\ r' \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$, $w' = \begin{pmatrix} q' \\ s' \end{pmatrix}$ on a

(1) $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r & s \\ p & q \end{vmatrix}$ $\qquad \det_e(t, u) = - \det_e(u, t)$

$\Downarrow$ $\qquad = - \begin{vmatrix} q & p \\ s & r \end{vmatrix}$ $\qquad \det_c(v, w) = - \det_c(w, v)$

(1') $\begin{vmatrix} p & q \\ p & q \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} p & p \\ r & r \end{vmatrix}$ $\qquad \det_e(t, t) = 0 = \det_c(v, v)$

(2) $\begin{vmatrix} \lambda p + \lambda' p' & \lambda q + \lambda' q' \\ r & s \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} p' & q' \\ r & s \end{vmatrix}$

$$\det_e(\lambda t + \lambda' t', u) = \lambda \det_e(t, u) + \lambda' \det_e(t', u)$$

(3) $\begin{vmatrix} \lambda p + \lambda' p' & q \\ \lambda r + \lambda' r' & s \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} p' & q \\ r' & s \end{vmatrix}$

$$\det_c(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda \det_c(v, w) + \lambda' \det_c(v', w)$$

(4) $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$

Exercice a) $\big((1) \text{ et } (2) \text{ et } (4) \big) \Leftrightarrow \big((1) \text{ et } (3) \text{ et } (4) \big)$

b) (1) et $(2) \Rightarrow \det_e(t, \lambda u + \lambda' u') = \lambda \det_e(t,u) + \lambda' \det_e(t,u')$

(1) et $(3) \Rightarrow \det_e(v, \lambda w + \lambda' w') = \lambda \det_e(v,w) + \lambda' \det_e(v,w')$

$(1')$ et (2) et $(3) \Rightarrow (1)$

Lemme $\forall\, p,q,r,s \in \mathbb{R}$ on a

$(1)\quad (r^2+s^2)(p,q) = (pr+qs).(r,s) - (ps-qr)(-s,r)$

c.a.d. $\begin{cases} (r^2+s^2).p = (pr+qs).r - (ps-qr)\times(-s) \\ \text{et } (r^2+s^2).q = (pr+qs)\,s - (ps-qr)\times r \end{cases}$

$(2)\quad (p^2+q^2)(r^2+s^2) = (pr+qs)^2 + (ps-qr)^2$

pv $\boxed{\text{Exercice}}$ (chap

Cor 1 Soit $t=(p,q)$, $u=(r,s) \in \mathbb{R}^2$ avec $u \neq (0,0)$

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{c.a.d } \det_e(t,u)=0) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } (p,q) = \lambda.(r,s)$$

pv $\Rightarrow$ $u \neq (0,0)$ donc $r^2+s^2 \neq 0$ et si $\lambda = \dfrac{pr+qs}{r^2+s^2}$ on a

$$(p,q) = \frac{1}{r^2+s^2}(r^2+s^2).(p,q) = \frac{pr+qs}{r^2+s^2}.(r,s) - \underbrace{\frac{\overset{=0}{ps-qr}}{r^2+s^2}}_{=0}(-s,r) = \lambda.(r,s)$$

$\Leftarrow$ Soit $t = \lambda u$ $\quad \det_e(t,u) = \det_e(\lambda u, u) \underset{(2)}{=} \lambda \det_e(u,u) \underset{(1')}{=} \lambda.0 = 0 \quad \square$

Application Si dans 1. $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ comme $(a', b') \neq (0,0)$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $(a,b) = \lambda(a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda a' \\ b = \lambda b' \end{cases}$

si $a' \neq 0, (a', c') \neq (0,0)$ $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $(a,c) = \mu(a', c') \Rightarrow \begin{cases} a = \mu a' \\ c = \mu c' \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda = \mu$

si $b' \neq 0$ $(c', b') \neq (0,0)$ $\exists \nu \in \mathbb{R}$ tq $(c,b) = \nu(c', b') \Rightarrow \begin{cases} c = \nu c' \\ b = \nu b' \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda = \nu$

$\nu = \mu = \lambda \neq 0$ (car $(a,b) \neq (0,0)$)

et $(a,b,c) = \lambda(a', b', c')$ et $(a', b', c') = \frac{1}{\lambda}(a,b,c)$

les équations sont proportionnelles définissent donc la m̃ dte

et $d \cap d' = d = d'$

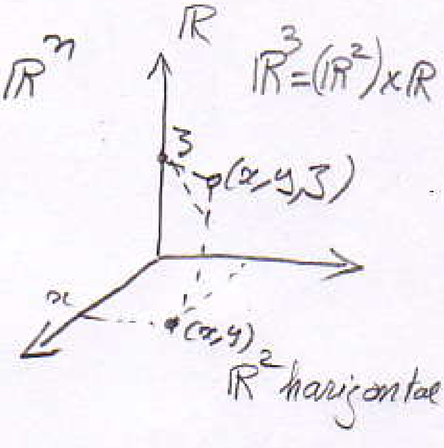
Rappels $n \in \mathbb{N}, n > 0$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n);\ 1 \leq k \leq n,\ x_k \in \mathbb{R}\}$ ensemble des n-uplets de réels

x_k est la $k^{\text{ième}}$ composante du $\begin{Bmatrix} \text{n-uplet} \\ \text{vecteur} \end{Bmatrix}$ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Ex 3 est la 2^{nd} composante de $(-1, 3, 7) \in \mathbb{R}^3$

Autres notations $(x_1, \dots, x_n) = x = \underset{\sim}{x} = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$



Si $n > 1$ $\mathbb{R}^n$ a été défini comme $\mathbb{R}^n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \xrightarrow{P} \mathbb{R}^{n-1}$

$(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$

$(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1})$

on a $p \circ i = Id_{\mathbb{R}^{n-1}}$ surjective donc p est surjective.

3 Combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$

$x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$\lambda\cdot x+\mu\cdot y \overset{def}{=} (\lambda x_1+\mu y_1,\dots,\lambda x_k+\mu y_k,\dots,\lambda x_n+\mu y_n)$$

cas particulier $\lambda=\mu=1$ $\quad 1\cdot x+1\cdot y \overset{def}{=} x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ somme de x et y

$\mu=0$ $\quad \lambda\cdot x+0\cdot y\overset{def}{=}\lambda\cdot x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$ multiplication externe de $\lambda\in\mathbb{R}$ avec $x\in\mathbb{R}^n$

se font composante par composante, en particulier si $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-1}$, $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1,\dots,x_{n-1})$

$$p(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)=\lambda\cdot p(x)+\mu\cdot p(y)$$

Les propriétés de $+$ et $\cdot$ (voir poly) se déduisent de celles de $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$

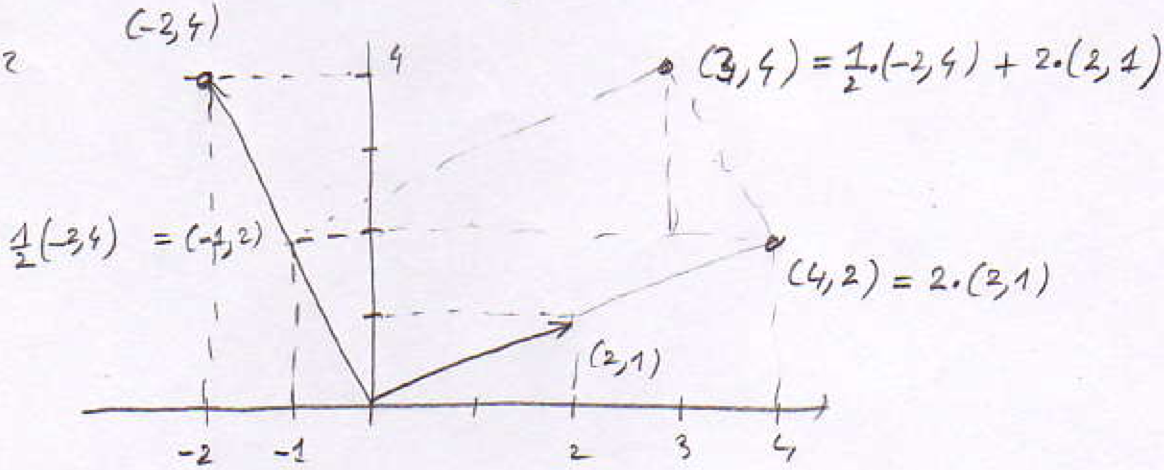
on note $0=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$, $-x=(-1)\cdot x$, $\lambda x=\lambda\cdot x$

Exemple a) $x=(r,s)$, $y=(-s,r)$, $z=(p,q)\in\mathbb{R}^2$

$$\lambda=pr+qs,\quad \mu=-(ps-qr),\quad v=r^2+s^2\in\mathbb{R}$$

$$v\cdot z=\lambda\cdot x+\mu\cdot y$$

b) $n=2$



Soit $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{la}}$ combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_m$ affectés des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ est

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k + \cdots + \lambda_m \cdot v_m$$

on dit que $v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k$ est $\boxed{\text{une}}$ combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_m$

Les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ engendrent
La famille $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{engendre} \\ \text{est génératrice dans} \end{array} \right\}$ $\mathbb{R}^n$ si

tout $v \in \mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_m$:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \left(\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right) \text{ t.q. } v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$$

Exemples a) $v = (1,3)$, $w = (0,1)$ engendrent $\mathbb{R}^2$: $(x,y) = x.(1,3) + (y-3x).(0,1)$

b) $e_1 = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ zéros}}), \ldots, e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ zéros}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k \text{ zéros}}), \ldots, e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ zéros}}, 1)$

engendrent $\mathbb{R}^n$: $(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} x_i \cdot e_i$

$n=2$ $\quad (x,y) = x.(1,0) + y.(0,1)$

$n=3$ $\quad (x,y,z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1)$

- La famille $v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^n$ est libre si les vecteurs ——— sont linéairement indépendants

toute combinaison linéaire nulle de $v_1,\ldots,v_m$ a tous ses coefficients nuls :

$$\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m \quad \Updownarrow \quad \forall \lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R} \qquad \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k = 0\right) \Rightarrow \left((\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = (0,\ldots,0) \Updownarrow \forall k\ 1\leq k\leq m \text{ on a } \lambda_k = 0\right)$$

dans le cas contraire $\left[\exists (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m \text{ t.q. } \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k = 0\right) \text{ et } \left((\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \neq (0,\ldots,0) \Updownarrow \exists k\ 1\leq k\leq m\ \lambda_k \neq 0\right)\right]$

(rappel $\text{non}(\forall x\ A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\ A \text{ et non } B$

$A : \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot x_k = 0 \qquad B : (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = (0,\ldots,0)$)

on dit que la famille $v_1,\ldots,v_m$ est liée

les vecteurs ——— sont linéairement dépendants

Exemples a) $u=(3,2), v, w$ liée car $u - 3v + 7w = (3-3+7.0,\ 2-9+7) = (0,0)$

b) v, w est libre car $0 = x.v + y.w = (x.1+y.0,\ x3+y.1) = (x, 3x+y)$

$\Rightarrow ((x=0) \text{ et } (3x+y=0)) \Rightarrow ((x=0) \text{ et } (y=0)$, c.a.d $(x,y)=(0,0)$

énoncé en cours donné comme exercice

c) Si $m \leq n$ $e_1,\ldots,e_m$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot e_k = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-m \text{ zeros}}) \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 \quad \square$$

Lemme Soit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k$

(1) $v_1, \dots, v_m$ engendrent $\mathbb{R}^n$ ssi f est surjective

(2) $v_1, \dots, v_m$ est une famille libre ssi f est injective

pv (1) ce sont les définitions (le vérifier en relisant le cours)

(2) $\Leftarrow$ si $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k = 0$ et f injective alors

$$\left(f(0) = 0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k = f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \right) \Longrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (0, \dots, 0)$$

$\Rightarrow$ Si $f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mu_1, \dots, \mu_m)$ et $v_1, \dots, v_m$ libre

$$0 = f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) - f(\mu_1, \dots, \mu_m) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \mu_k) \cdot v_k$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\mu_1, \dots, \mu_m) \Leftarrow (\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_m - \mu_m) = (0, \dots, 0)$$

$\square$

fin du 09/10/2006

$m \in \mathbb{N}$ $m > 0$

Prop. Soit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$, $\mu_m \neq 0$, $w_m = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \cdot v_k$, $1 \leq k \leq m-1$ $w_k = v_k$

alors: (0) si pour $1 \leq k \leq m-1$ $\nu_k = -\mu_m^{-1} \mu_k$, $\nu_m = \mu_m^{-1}$ $v_m = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \cdot w_k$

(1) $v_1, \dots, v_m$ famille libre ssi $w_1, \dots, w_m$ famille libre

(2) $\left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k ; (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k \cdot w_k ; (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$

en particulier $v_1, \dots, v_m$ famille génératrice ssi $w_1, \dots, w_m$ famille génératrice.

pv (0) si $m = 1$ $w_1 = \mu_1 \cdot v_1$ et $\mu_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = \mu_1^{-1} \cdot w_1$

si $m > 1$ $w_m = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k \cdot v_k + \mu_m v_m = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k \cdot w_k + \mu_m \cdot v_m$

donc $\mu_m \cdot v_m = -\sum_{k=1}^{m-1} \mu_k \cdot w_k + w_m \Rightarrow v_m = \sum_{k=1}^{m-1} -(\mu_m^{-1} \mu_k) \cdot w_k + \mu_m^{-1} \cdot w_m$.

$\sum_{k=1}^{m} \lambda'_k \cdot w_k = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda'_k \cdot v_k + \lambda'_m \sum_{k=1}^{m} \mu_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda'_k \cdot v_k + \lambda'_m \mu_k \cdot v_k + \lambda'_m \cdot \mu_m \cdot v_m$

$= \sum_{k=1}^{m-1} (\lambda'_k + \lambda'_m \mu_k) \cdot v_k + \lambda'_m \mu_m v_m \in \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k ; (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$

d'où $\supset$ dans (2)

$\Rightarrow$ et si $\left(v_1, \dots, v_m \text{ libre} \right)$ et $\left(0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k \cdot w_k \right) \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq k \leq m-1 & \lambda'_k + \lambda'_m \mu_k = 0 \\ \lambda'_m \mu_m = 0 \underset{\mu_m \neq 0}{\Rightarrow} \lambda'_m = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 \leq k \leq m$ $\lambda'_k = 0$ donc $w_1, \dots, w_m$ libre : $\Rightarrow$ dans (1)

$\subset$ dans (2) et $\Leftarrow$ dans (1) suivent de ce que d'après (0) les hypothèses sont symétriques en les v et les w. $\square$

Remarque ① Si $1 \leq l < m$ $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \cdot v_k + \sum_{k=l+1}^{m} \lambda_k \cdot v_k$

$$= \sum_{k=l+1}^{m} \lambda_k \cdot v_k + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \cdot v_k = \lambda_{l+1} \cdot v_{l+1} + \cdots + \lambda_m \cdot v_m + \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_l \cdot v_l$$

ainsi pour vérifier que la famille $v_1, \ldots, v_m$ est libre ou génératrice on peut (quitte à changer leur ordre par une permutation circulaire) choisir le vecteur " qui est en "dernière place" (ici v_l est le nouveau v_m)

② En fait pour toute permutation $\sigma(1) \ldots \sigma(m)$ (voir Chap 1) c.a.d $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ bijective on a

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{\sigma(k)} \cdot v_{\sigma(k)}$$

le choix des permutation circulaire a l'avantage pratique de minimiser les risques d'oubli ou d'erreur en recopiant les termes.

Thm Soit $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

(1) Si $v_1, \ldots, v_m$ est génératrice alors $m \geq n$.

Si de plus $m = n$ alors $v_1, \ldots, v_m$ est aussi libre

(2) Si $v_1, \ldots, v_m$ est libre alors $m \leq n$.

Si de plus $m = n$ alors $v_1, \ldots, v_m$ est aussi génératrice.

une base de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre et génératrice

Exemple a) $v=(1,3)$, $w=(0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

b) $e_1, \dots, e_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Cor 1 $\mathbb{R}^n$ a des bases et toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ ont n éléments

Cor 2 Si $f_1, \dots, f_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot f_k$$

est bijective

Exercice Soit $i=(a,c)$ et $j=(b,d)$ une base de $\mathbb{R}^2$ alors

(1) $0 \neq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det_c(i,j)$

(2) si $v = p.i + r.j$, $w = q.i + s.j$ alors

$$\det_c(v,w) = \begin{vmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$$

pv de (1) du Thm récurrence sur n

$n=1$ comme $m>0$ $\quad m \geqslant 1 = n$

Si $m=n=1$ $\quad 1 = \mu_1 \cdot v_1$ donc $v_1 \neq 0$ et $(\lambda_1 v_1 = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = 0)$: v_1 libre

$n>1$ $\quad v_1, \dots, v_m$ génératrice et $e_n \in \mathbb{R}^n$ donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ t.q. $e_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k$

Quitte à changer l'ordre des v_i on peut (Rmq) supposer $\lambda_m \neq 0$

le (2) de la prop. donne $v_1, \dots, v_{m-1}, e_n$ engendrent $\mathbb{R}^n$

c.a.d. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\quad f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot v_k + \lambda_m e_m$ surjective (Lemme)

comme p est surjective $p \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ est surjective

Rappel les combinaisons linéaires se font composante par composante

$$p \circ f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = p(f(\lambda_1, \dots, \lambda_m)) = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot p(v_k) + \lambda_m \cdot \underbrace{p(e_m)}_{=0} = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot p(v_k)$$

donc $f' : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ $\quad f'(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot p(v_k)$

est surjective c.a.d. $p(v_1), \dots, p(v_{m-1})$ engendrent $\mathbb{R}^{n-1}$

donc (hypothèse de récurrence) $m-1 \geqslant n-1$ et $m \geqslant n$

Si $m=n$ alors $m-1 = n-1$ et (récurrence) $p(v_1), \dots, p(v_{m-1})$ est libre donc si $\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot v_k + \lambda_m \cdot e_m = 0$ alors

$$0 = p(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot p(v_k) + \lambda_m \cdot \underset{\overset{\|}{0}}{p(e_m)} = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cdot p(v_k)$$

donc ($p(v_1), \ldots, p(v_{m-1})$ libre) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$

et $0 = \sum_{k=1}^{m-1} 0 \cdot v_k + \lambda_m \cdot e_n = \lambda_m \cdot e_n$ donc aussi $\lambda_m = 0$

ainsi $v_1, \ldots, v_{m-1}, e_n$ est libre

et, par (1) de la prop, $v_1, \ldots, v_m$ est libre. $\square$

Exercice* faire la preuve de (2).

Indication distinguer les cas

1) $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ t.q $e_n = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k$

(si $\lambda_m \neq 0$ $\boxed{\Rightarrow}$ $p(v_1), \ldots, p(v_{m-1})$ libre dans $\mathbb{R}^{n-1}$ $\underset{rec}{\Rightarrow}$ $m-1 \leq n-1$)

2) $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ $e_m \neq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot v_k$

($\boxed{\Rightarrow}$ $p(v_1), \ldots, p(v_m)$ libre dans $\mathbb{R}^{n-1}$ $\underset{rec}{\Rightarrow}$ $m \leq n-1 \leq n$)