# Devoir à rendre les 28 et 29 Septembre 2006

[indiquez le temps passé et, si vous travaillez à plusieurs, rendez une seule copie par groupe de travail]

## Exercices [Ces deux exercices **1)** et **2)** sont indépendants]

**1)** Soit $n$ un entier naturel et

$$a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(9k^2-1)}{\prod_{l=1}^{n}(4l^2+2l)}$$

a) Expliciter $a_1, a_2, 3a_1, 3^2a_2$

b) En général calculer $a_n$

[exprimer $a_n$ par une "formule fermée" (avec des factorielles, mais sans le symbole $\prod\limits_{k=*}^{**}$)]

c) Prouver que $3^n a_n$ est un entier naturel.

**2)** Soit $n$ un entier naturel, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-4k}3^{2k}\binom{n}{k}$$

## Problème [indépendant des exercices **1)** et **2)**]

**3)** Prouver que l'équation

$(E)$ $$X^2 + X - 1 = 0$$

a deux solutions, qu'elles sont réelles de signe opposé, résoudre $(E)$.

**4)** On se place dans le plan complexe.

a) Tracer le cercle $C$ de centre $-\frac{1}{4}$ et passant par le point $\frac{i}{2}$.

b) Prouver que $C$ coupe l'axe réel en deux points $A$ et $B$. On note $x_A$ et $x_B$ leurs affixes et suppose $x_B < x_A$. Prouvez que $2x_A$ et $2x_B$ sont les solutions de $(E)$.

**5)** Soit $n$ un entier supérieur à un et $\xi$ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1 [*c.a.d.* $\xi$ est un nombre complexe tel que $\xi^n = 1$ et $\xi \neq 1$]. Prouver

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k = 0$$

et expliciter cette relation (sans utiliser le symbole $\sum_{k=*}^{**}$) dans le cas $n = 5$.

**6)** a) Un des nombres $e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$ est-il conjugué de $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et si oui lequel?

b) Prouver $2\cos(\frac{2\pi}{5}) = e^{i\frac{2\pi}{5}} + (e^{i\frac{2\pi}{5}})^4$, expliciter $(e^{i\frac{2\pi}{5}} + (e^{i\frac{2\pi}{5}})^4)^2$.
Déduire alors de **5)** que $2\cos(\frac{2\pi}{5})$ est la solution positive de l'équation $(E)$.

c) Déduire de ce qui précède que la tangente au cercle $C$ au point $A$ coupe le cercle unité (le cercle de centre 0 et rayon 1) en les points $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Quelle est l'intersection de la tangente en $B$ au cercle $C$ avec le cercle unité?