Mat 112 Info-miage correction du devoir 1 2006/2007

1) a) $a_1 = \frac{9\times1-1}{4\times1+2\times1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; $a_2 = \frac{4}{3}\times\frac{9\times4-1}{4\times4+2\times2} = \frac{4}{3}\times\frac{35}{20} = \frac{7}{3}$; $3a_1 = 3\times\frac{4}{3} = 4$; $3^2a_2 = 3^2\times\frac{7}{3} = 3\times7 = 21$

b) $$a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k)^2-1}{\prod_{l=1}^{n}2l(2l+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)(3k+1)}{\prod_{l=1}^{n}2l(2l+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)3k(3k+1)/3k}{\prod_{l=1}^{n}2l(2l+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)3k(3k+1)}{\left[\prod_{l=1}^{n}2l(2l+1)\right]n!\,3^n}$$

Comme $3\times1-1=2$ et $(3k+1)+1=3k+2=3(k+1)-1$ on a

$$\prod_{k=1}^{n}(3k-1)\,3k\,(3k+1) = \prod_{i=2}^{3n+1} i = \prod_{i=1}^{3n+1} i = (3n+1)!$$

de même $2\times1=2$ et $(2l+1)+1=2(l+1)$ donc $\prod_{l=1}^{n}2l(2l+1) = \prod_{j=2}^{2n+1} j = (2n+1)!$

donc $a_n = \frac{(3n+1)!}{(2n+1)!\,n!}\,\frac{1}{3^n} = \binom{3n+1}{n}\frac{1}{3^n}$

ce qui explique que $3^n a_n = \binom{3n+1}{n}$ soit entier

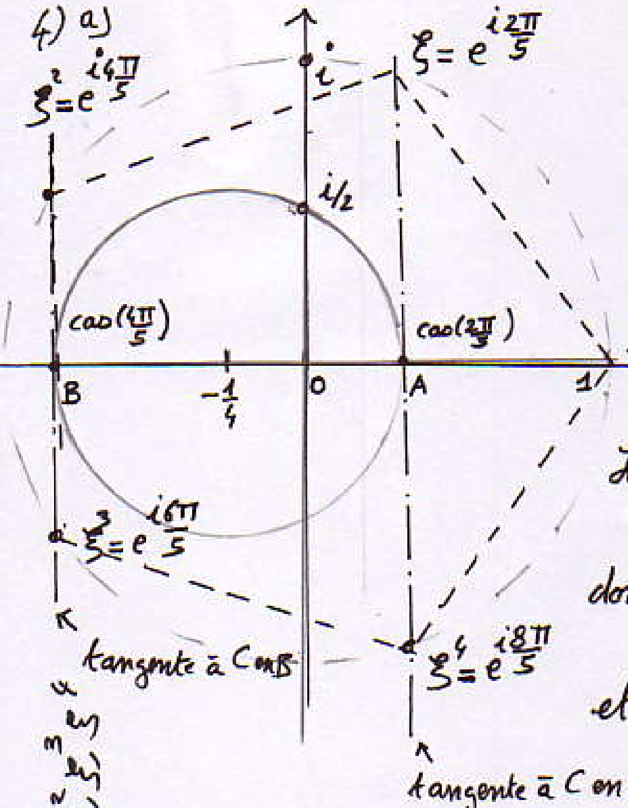
Exercice $3a_1 = \binom{4}{1}$ et montrer par récurrence sur n $3^n a_n = \binom{3n+1}{n}$

2) $$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-4k}\,3^{2k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{3(n-k)-k}\,3^{2k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^3)^{n-k}\left(\frac{3^2}{2}\right)^k$$
$$= \left(2^3+\frac{3^2}{2}\right)^n = \left(\frac{2^4+3^2}{2}\right)^n = \left(\frac{25}{2}\right)^n \quad \left(=\frac{5^{2n}}{2^n}\right) \;.\;\square$$

3) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = 1^2-4(-1)=5$ donc positif et (E) a deux solutions réelles. Le produit des solutions est $\frac{-1}{1}=-1$ donc les solutions sont de signe opposé ce sont

$$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}<0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}>0$$

4) a)



b] Comme le centre $-\frac{1}{4}$ du cercle C est sur l'axe réel le cercle C coupe l'axe réel en deux points A et B.

Le rayon r de C vérifie $r^2 = \left|\frac{i}{2} - (-\frac{1}{4})\right|^2 = \left|\frac{1}{4} + \frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

donc $r = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $x_B = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $x_A = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

et $2x_B = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $2x_A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sont les deux solutions de (E).

5] Comme $\xi^n = 1$ on a $0 = 1 - \xi^n = (1-\xi)\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k$. Comme $\xi \neq 1$ on a $1 - \xi \neq 0$ d'où $\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k = 0$.

Dans le cas $n = 5$ on a donc $0 = \sum_{k=0}^{4} \xi^k = 1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4$ que l'on utilisera dans 6 sous la forme $\xi^2 + \xi^3 = -(1 + \xi + \xi^4)$

6] a] $e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{(10-2)\pi}{5}} = e^{i\frac{10\pi}{5}} e^{-i\frac{2\pi}{5}} = e^{i2\pi}\, \overline{e^{i\frac{2\pi}{5}}} = 1.\overline{e^{i\frac{2\pi}{5}}} = \overline{e^{i\frac{2\pi}{5}}}$

donc $e^{i\frac{8\pi}{5}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ est conjugué de $e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Dans la suite on note $\xi = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, c'est une racine cinquième de 1.

b] ainsi $2\cos\frac{2\pi}{5} = 2\,\mathrm{Re}(\xi) = \xi + \overline{\xi} = \xi + \xi^4 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$.

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4\right)^2 = (\xi + \xi^4)^2 = \xi^2 + 2\xi\cdot\xi^4 + \xi^8 = \xi^2 + 2\xi^5 + \xi^5\cdot\xi^3$$

$$= \xi^2 + 2 + \xi^3 \underset{(\text{par } 5)}{=} 2 - (1 + \xi + \xi^4) = 1 - (\xi + \xi^4) = 1 - 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

donc $\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$ et $2\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de (E).

comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ c'est la racine positive de (E) et $\cos\frac{2\pi}{5} = x_A$

c] Les points d'intersection sont $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \xi$ et $\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = \xi^4$

pour ceux de la tangente en B à C avec le cercle unité on montre de même $2\cos\frac{4\pi}{5} = x_B$ et les points sont ξ^2, ξ^3 voir pointillés sur la figure

On a construit avec la règle et le compas le pentagone régulier $1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ où $\xi = e^{i\frac{2\pi}{5}}$