Correction du troisième contrôle

Questions de cours

1) Soit $<,>$ un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$, la norme de $v \in \mathbf{R}^n$ est $\|v\| = \sqrt{<v,v>}$.
Pour tout u et v dans $\mathbf{R}^n$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|<u,v>| \leq \|u\|\|v\|$$

avec égalité si et seulement si u et v sont liés.
preuve : Si $u = 0$ alors u et v sont liés et on a $<u,v>= 0 = \|u\|\|v\| = 0$.
Sinon pour tout réel $t \in \mathbf{R}$ on a

$$0 \leq \|tu+v\|^2 =< tu+v, tu+v >= t^2 < u,u > +2t < u,v > + < v,v >$$

Comme $u \neq 0$ on a $< u,u >\neq 0$ et le membre de droite est un trinôme réel du second degré $T(t)$ de signe constant qui ne s'annule que si il y a un $t \in \mathbf{R}$ avec $tu + v = 0$, c'est à dire, puisque $u \neq 0$, si u et v sont liés.
Le (petit) discriminant $\delta =< u,v >^2 - < u,u >< v,v >$ de T est donc négatif ou nul avec égalité si et seulement si $T(t) = 0$ a une racine (double), ce qui équivaut à $< u,v >^2 \leq < u,u >< v,v >$, où (en prenant la racine de cette inégalité de nombres positifs ou nuls) à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) a) Une famille $v_1,\ldots,v_n \in E$ de n vecteurs de E est *libre* si et seulement si pour tout $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k = 0$ on a $x=0$[1]

b) Si l'application $f : \mathbf{R}^n \to E, f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$ est injective alors pour tout $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ tel que $0 = f(0) = f(x)$ on a $x = 0$ et, d'après a), la famille $v_1,\ldots,v_n \in E$ est libre.
Réciproquement si f n'est pas injective il y a $y \neq y' \in \mathbf{R}^n$ avec $f(y) = f(y')$.
Donc si $y=(y_1,\ldots,y_n), y'=(y'_1,\ldots,y'_n)$ et $x = y' - y = (y'_1 - y_1,\ldots,y'_n - y_n)$ on a

$$x \neq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n}(y'_k - y_k)\cdot v_k = \sum_{k=1}^{n} y'_k \cdot v_k - \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot v_k = f(y') - f(y) = 0$$

et d'après la négation de a) la famille $v_1,\ldots,v_n$ n'est pas libre.

Exercices

3) Si il y a un entier k avec $2 \leq k \leq n$ et $v_k = v_1$ alors en posant $x = (x_1,\ldots,x_n)$ avec $x_1 = 1, x_k = -1$ et pour $2 \leq j \neq k \leq n, x_j = 0$ on a $x \neq 0$ et $0 = v_1 - v_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j$, ainsi la famille $v_1,\ldots,v_n$ n'est pas libre.
Donc par contraposition si pour $n \geq 2$ une famille $v_1 \ldots v_n \in E$ de n vecteurs d'un espace E est libre alors, pour $2 \leq k \leq n$, on a $v_k \neq v_1$.

4)a1) En écrivant que les coordonnées x,y,z de chacun des points w_1,w_2,w_3 vérifient $ax+by+cz+d=0$ on obtient pour les quatre nombres a,b,c,d le système homogène

$$\begin{cases} 0 - b + c + d = 0 \\ a + 0 - c + d = 0 \\ -a + b + 0 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 0 - c + d = 0 \\ -a + b + 0 + d = 0 \\ 0 - b + c + d = 0 \end{cases}$$

(on a permuté équations), et en ajoutant la 1[ière] ligne à la 2[nde] et après la 2[nde] à la 3[ième] :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 0 - c + d = 0 \\ 0 + b - c + 2d = 0 \\ 0 - b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 0 - c + d = 0 \\ 0 + b - c + 2d = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 3d = 0 \end{cases}$$

d'où $d = 0, b = c$ et $a = c$, l'espace des solutions est engendré par $(a,b,c,d)=(1,1,1,0)$, donc de dimension maximale $4-3=1$ et les trois points définissent un plan, le plan d'équation $x+y+z=0$.

[1] *c. a d.* $x_1=0$ et $x_2=0$ et... et $x_n=0$ (tous les x_k sont nuls)

On aurait aussi pu remarquer que les coordonnées (x, y, z) de chacun des points w_1, w_2, w_3 vérifient $x + y + z = 0$ donc les trois points w_1, w_2, w_3 sont dans le plan d'équation $x+y+z = 0$. Puis que $w_2-w_1 = (1, 1, -2), w_3-w_1 = (-1, 2, -1)$ est une famille libre donc par les trois points w_1, w_2, w_3 passe un seul plan.

a2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} u_k = u_1 + u_2 + u_3 = (\sqrt{3}+1-(1+\sqrt{3}), -1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}, 2-2+0) = (0, 0, 0)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{3} w_k = w_1 + w_2 + w_3 = (0 + 1 - 1, -1 + 0 + 1, 1 - 1 + 0) = (0, 0, 0).$

Il suffit[2] de calculer $< u_i, u_j >$ et $< w_i, w_j >$ quand $i \leq j$:

$< u_1, u_1 >= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3 + 1 + 4 = 8$

$< u_1, u_2 >= \sqrt{3} \cdot 1 + (-1) \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot (-2) = -4$

$< u_1, u_3 >= \sqrt{3} \cdot (-(1 + \sqrt{3})) + (-1) \cdot (1 - \sqrt{3}) + 2 \cdot 0 = -\sqrt{3} - 3 - 1 + \sqrt{3} = -4$

$< u_2, u_2 >= 1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (-2) \cdot (-2) = 1 + 3 + 4 = 8$

$< u_2, u_3 >= 1 \cdot (-(1 + \sqrt{3})) + \sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{3}) + (-2) \cdot 0 = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = -4$

$< u_3, u_3 >= -(1+\sqrt{3})\cdot(-(1+\sqrt{3}))+(1-\sqrt{3}))\cdot(1-\sqrt{3}))+0\cdot 0 = 1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3} = 8.$

Remarquer que $< u_1, u_1 >=< u_2, u_2 >=< u_3, u_3 >= 8$ et $< u_1, u_2 >=< u_1, u_3 >=< u_2, u_3 >= -4$.

Puisque la permutation circulaire des coordonnées $\sigma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \sigma(x, y, z) = (y, z, x)$ conserve le produit scalaire : $< \sigma(x, y, z), \sigma(x', y', z') >=< (y, z, x), (y', z', x') >= y\cdot y' + z\cdot z' + x\cdot x'$ $= x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' =< (x, y, z), (x', y', z') >$ et $w_2 = \sigma(w_1), w_3 = \sigma(w_2)$ on a $< w_1, w_1 >=< w_2, w_2 >=< w_3, w_3 >$ et $< w_1, w_2 >=< w_2, w_3 >=< w_3, w_2 >$ $(=< w_1, w_3 >)$ où $< w_1, w_1 >= 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 2$ et $< w_1, w_2 >= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1$

Donc pour $1 \leq k \leq 3$ on a $\|u_k\| = \sqrt{< u_k, u_k >} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\|w_k\| = \sqrt{< w_k, w_k >} = \sqrt{2}$

L'angle $\widehat{u, v}$ entre deux vecteurs non nuls $u, v \in \mathbf{R}^n$ est le réel $\varphi \in [0, \pi]$ tel que $< u, v >= \cos(\varphi)\|u\| \cdot \|v\|$ donc ici $\cos(\widehat{u_1, u_2}) = \frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \cos(\widehat{w_1, w_2})$.
D'où $\widehat{u_1, u_2} = \widehat{w_1, w_2} = \frac{2\pi}{3}$.

b) Le rang de la famille v_1, v_2, v_3 est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ qu'elle engendre. Comme $v_1+v_2+v_3 = 0$ on a $v_3 = -v_1-v_2$ donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est de dimension au plus 2 et le rang de v_1, v_2, v_3 est au plus 2.

c) Si la famille v_1, v_2, v_3 est de rang 1 il y a un vecteur non nul $v \in \mathbf{R}^3$ et $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ non tous nuls tels que pour $1 \leq k \leq 3$ on ait $v_k = x_k \cdot v$, et $v_1+v_2+v_3 = (x_1+x_2+x_3)\cdot v$. Donc $L = \|v_k\| = \|x_k \cdot v\| = |x_k| \cdot \|v\|$ et $|x_1| = |x_2| = |x_3|$. Soit tous les x_k sont de même signe et $|x_1 + x_2 + x_3| = 3|x_1| \neq 0$, sinon $|x_1 + x_2 + x_3| = |x_1| \neq 0$. Dans les deux cas $\|v_1 + v_2 + v_3\| = |x_1 + x_2 + x_3|\|v\| \neq 0$ donc $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$. D'où, par contraposition, si $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ alors v_1, v_2, v_3 n'est pas de rang 1.

d) Comme $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ on a $v_2 = -v_1 - v_3$ et $v_3 = -v_1 - v_2$ d'où
$< v_1, v_2 >=< v_1, -v_1 - v_3 >= - < v_1, v_1 > - < v_1, v_3 >= -\|v_1\|^2 - < v_1, v_3 >$
De même $< v_2, v_3 >=< v_2, -v_1 - v_2 >= - < v_2, v_1 > -\|v_2\|^2$

e) De la seconde relation de **d)** vient $< v_2, v_1 >= -\|v_2\|^2 - < v_2, v_3 >$ qui soustraite à la première relation de **d)** donne $0 = \|v_2\|^2 - \|v_1\|^2 + < v_2, v_3 > - < v_1, v_3 >$. D'où puisque $\|v_2\| = \|v_1\|$ par l'hypothèse de **c)**, $< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >$, et les hypothèses en v_1, v_2, v_3 étant symétriques, $< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_3, v_1 >$ d'où en reportant dans la première relations de **d)** $2 < v_1, v_2 >= -\|v_2\|^2 = -L^2$ soit $< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_3, v_1 >= -\frac{1}{2}L^2$. Si $L \neq 0$, pour $1 \leq i \neq j \leq 3$, on tire $\cos(\widehat{v_i, v_j}) =< v_i, v_i > \cdot \frac{1}{\|v_i\|\cdot\|v_j\|} = -\frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{L\cdot L} = -\frac{1}{2}$ donc $\widehat{v_i, v_j} = \frac{2\pi}{3}$.

[2] car pour tout $u, v \in \mathbf{R}^3$ on a $< u, v >=< v, u >$