Correction du second contrôle du groupe 2

Questions de cours

1) a) Si $f:\{1,\ldots,n\}\to E$ est surjective alors pour tout $y\in E$ il y a $x\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $f(x)=y$, *c.a d.* $x\in f^{-1}(\{y\})$. Ainsi la pré-image $f^{-1}(\{y\})$ est une partie non vide de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ des n premiers entiers positifs et a donc un plus petit élément. Soit $g:E\to\{1,\ldots,n\}$ l'application qui à $x\in E$ associe le plus petit élément $g(y)$ de $f^{-1}(y)$. Pour tout $y\in E$ on a $f(g(y))\in\{y\}$ puisque $g(y)\in f^{-1}(\{y\})$ et donc $f\circ g(y)=f(g(y))=y=\mathrm{Id}_E(y)$: on a la relation $f\circ g=\mathrm{Id}_E$.

b) Réciproquement si il y a une application $g:E\to\{1,\ldots,n\}$ telle que $f\circ g=\mathrm{Id}_E$ alors pour tout $y\in E$ on a $y=\mathrm{Id}_E(y)=f\circ g(y)=f(g(y))$ il y a donc $x=g(y)$ tel que $f(x)=y$ et f est surjective.

2) Une famille $v_1,\ldots,v_n\in\mathbf{R}^m$ de n vecteurs de $\mathbf{R}^m$ est

a1) *libre* si et seulement si pour tout $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot v_k=0$

on a $x=0$, *c. a d.* $x_1=0$ et $x_2=0$ et…et $x_n=0$ (tous les x_k sont nuls).
a2) *liée* si et seulement si elle n'est pas libre. Ce qui revient[1] à dire :

il y a un $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot v_k=0$ et $x\neq 0$,

c. a d. $x_1\neq 0$ ou $x_2\neq 0$ ou…ou $x_n\neq 0$ (un des x_k est non nul).

b) Si la famille $v_1,\ldots,v_n\in\mathbf{R}^m$ est liée, d'après a2) il y a $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ tel que $x\neq 0$ et $f(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot v_k=0=f(0)$ donc f n'est pas injective[2].

Réciproquement si f n'est pas injective il y a $y\neq y'\in\mathbf{R}^n$ avec $f(y)=f(y')$.
Donc si $y=(y_1,\ldots,y_n), y'=(y'_1,\ldots,y'_n)$ et $x=y'-y=(y'_1-y_1,\ldots,y'_n-y_n)$ on a

$x\neq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot v_k=\sum_{k=1}^{n}(y'_k-y_k)\cdot v_k=\sum_{k=1}^{n} y'_k\cdot v_k-\sum_{k=1}^{n} y_k\cdot v_k=f(y')-f(y)=0$

et d'après a2) la famille $v_1,\ldots,v_n$ est liée.

Exercices

3) a) Sur la figure (on a choisi $a=2, c=4, b=3, d=5, n=7$) l'ensemble X est représenté comme l'ensemble des points du plan $\mathbf{R}^2$ dont les coordonnées (i,j) sont entières, les abscisses $i\in\{1,\ldots,a\}(=\{1,2\})$ les ordonnées $j\in\{b,\ldots,n\}(=\{3,4,5,6,7\})$ et l'ensemble Y est représenté comme l'ensemble des points du plan $\mathbf{R}^2$ dont les coordonnées (i,j) sont entières, les abscisses $i\in\{1,\ldots,c\}(=\{1,2,3,4\})$,
les ordonnées $j\in\{d,\ldots,n\}(=\{5,6,7\})$. L'intersection de X et de Y est

$$X\cap Y=\{(i,j)\in\mathbf{N}^2; 1\le i\le a \text{ et } 1\le i\le c \text{ et } b\le j\le n \text{ et } d\le j\le n\}=$$

$$=\{(i,j)\in\mathbf{N}^2; 1\le i\le a \text{ et } d\le j\le n\}=\{(i,j)\in\mathbf{N}^2; i\in\{1,\ldots a\} \text{ et } j\in\{d,\ldots n\}\}$$

$$\big[\text{dans le cas de la figure } =\{(i,j)\in\mathbf{N}^2; i\in\{1,2\} \text{ et } j\in\{5,6,7\}\}\big]$$

b) Comme $\mathrm{Card}(\{1,\ldots,a\})=a,\ \mathrm{Card}(\{b,\ldots,n\})=n-b+1$ on a

$$\mathrm{Card}(X)=a(n-b+1) \text{ (dans le cas de la figure } =2(7-3+1)=2\cdot 5=10)$$

De même $\mathrm{Card}(Y)=c(n-d+1)$ (dans le cas de la figure $=4(7-5+1)=4\cdot 3=12$). et
$\mathrm{Card}(X\cap Y)=a(n-d+1)$ [dans le cas de la figure $=2(7-5+1)=2\cdot 3=6$]

---

[1] (en écrivant la négation de la définition a1) de *être libre*)

[2] car $x=x, y=0$ est contre-exemple à f est injective : $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$ on a $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

c) L'entier $\text{Card}(X)+\text{Card}(Y)$ compte les éléments de $X\cap Y$ deux fois et les autres éléments de $X\cup Y$ une fois. On a donc la relation

$$\text{Card}(X)+\text{Card}(Y)=\text{Card}(X\cup Y)+\text{Card}(X\cap Y) \quad \text{d'où} \quad \text{Card}(X\cup Y)=$$
$$=\text{Card}(X)+\text{Card}(Y)-\text{Card}(X\cap Y)=a(n-b+1)+c(n-d+1)-a(n-d+1)$$

On peut vérifier sur la figure que, dans le cas dessiné $X\cup Y$ a bien $10+12-6=16$ éléments.

4) La droite $d(t)$ de pente t passant par $B=(-1,0)$ est d'équation $y=tx+b$ avec $0=t(-1)+b$, donc $b=t$ et l'équation de $d(t)$ est $y=t(x+1)$.
Un point (x,y) est donc dans l'intersection $d(t)\cap\mathcal{C}$ si et seulement si

$$y=t(x+1) \quad \text{et} \quad x^2+y^2-1=0$$

ce qui équivaut[3] à $y=t(x+1)$ et $0=x^2+t^2(x+1)^2-1=(x+1)[x-1+t^2(x+1)]$ d'où $[x=-1$ et $y=t(-1+1)=0]$ ou $[0=x-1+t^2(x+1)=x(t^2+1)-(1-t^2)$ et $y=t(x+1)]$ *c.a d.* $(x,y)=B$ ou $[x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y=t(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1)=t\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}]$:

$$d(t)\cap\mathcal{C}=\{B,(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})\}$$

b) Comme $(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})\in d(t)\cap\mathcal{C}$ on a $(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})\in\mathcal{C}$.
Comme $\frac{1-t^2}{1+t^2}\neq\frac{-1-t^2}{1+t^2}=-1$ ce point $f(t)=(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})$ est distinct de $(-1,0)=B$ donc sur une seule droite passant par B, d'après a) c'est la droite $d(t)$ de pente t.
Ainsi si $f(t)=f(t')$ on a $d(t)=d(t')$ donc $t=t'$, c'est à dire f est injective.
Nous avons vu qu'il n'y a pas de $t\in\mathbf{R}$ avec $f(t)=B$. Puisque $B\in\mathcal{C}$, l'application f n'est n'est pas surjective, donc pas bijective. Comme pour tout point $M=(x,y)\in\mathcal{C}\setminus\{B\}$ du cercle $\mathcal{C}$ distinct de B on a $x>-1$ la droite passant par B et M n'est pas verticale, donc est une droite $d(t)$ et l'image de f est $\mathcal{C}\setminus\{B\}$.

5) a) Par la relation de Chasles et l'hypothèse $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ on a

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}$$

puis $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.
On a donc

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{BD}\|^2=<\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}>$$
$$=<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}>+$$
$$+<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}>-<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}>$$
$$=<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}>=2[\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AD}\|^2]$$

d'où la relation du parallélogramme (RP) puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DA}$

b) La première relation de l'énoncé distribué est fausse si $w\neq 0$. Il fallait lire

$$\|u\|^2+\|w-u\|^2+\|v-w\|^2+\|-v\|^2=2(\|u\|^2+\|w\|^2+\|v\|^2-<w,u+v>)$$

De $\|v-u\|^2=<v-u,v-u>=<v,v>-<v,u>-<u,v>+<u,u>=\|v\|^2-2<u,v>+\|u\|^2$ on tire la seconde relation. Pour la première on développe de même $\|w-u\|^2$ et $\|v-w\|^2$ puis écrit $-2<w,u>-2<v,w>=-2(<w,u>+<w,v>)=-2<w,u+v>$.

5.2) D'après **5.1)** a) il suffit de vérifier que si (RP) est satisfaite alors A,B,C,D est un parallélogramme. On pose $u=\overrightarrow{AB}, w=\overrightarrow{AC}$ et $v=\overrightarrow{AD}$. La relation (RP) est l'égalité des deux membres de gauche[4] des relations de **5.1)**b), d'où en soustrayant ceux de droite :

$$0=\|w\|^2+\|u\|^2+\|v\|^2+2<u,v>-2<w,u+v>=$$
$$=\|w\|^2+\|u+v\|^2-2<w,u+v>=\|w-(u+v)\|^2$$

donc $w-(u+v)=0$ *c. a d.* $w=u+v$ donc $\overrightarrow{AB}=u=w-v=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$.
Ainsi A,B,C,D vérifie la définition d'un parallélogramme dans $\mathbf{R}^n$ donnée dans l'énoncé.

---

[3] la dernière factorisation par $x+1$ est naturelle : on savait que $B=(-1,0)$ est dans $d(t)$ par définition de $d(t)$ et dans $\mathcal{C}$ donc $x=-1$ doit être solution de l'équation $x^2+t^2(x+1)^2-1$.

[4] une fois la faute corrigée!!