Correction du premier contrôle

Question de cours et exercice concrets (4 + 4 = 8 points)

1) La relation d'Euler (*c. a.d.* définition[1]de l'exponentielle d'un complexe z quand ce nombre $z = iy, y \in \mathbf{R}$ est imaginaire pur) : $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ exprime $\cos(y)$ et $\sin(y)$ comme partie réelle et imaginaire de l'exponentielle complexe e^{iy}.

D'autre part l'exponentielle complexe vérifie[2]pour tout $z, z' \in \mathbf{C}$ la relation $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ donc si $a, b \in \mathbf{R}$ sont deux réels, en prenant $z = ia$ et $z' = ib$ dans la relation précédente on obtient que $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, les parties réelles et imaginaires de $e^{i(a+b)}$, sont les parties réelles et imaginaire du produit $e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(ib) + i\sin(ib))$ c'est à dire
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

3) a) Le discriminant du trinôme $T(X) = (1+i)X^2 - 6X + 4 - 4i$ est

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1+i)(4-4i) = 36 - 16(1+i)(1-i) = 36 - 16 \cdot 2 = 36 - 32 = 4 = 2^2$$

les racines sont donc $\frac{6-2}{2(1+i)} = \frac{4}{2(1+i)} = \frac{2}{1+i} = 1 - i$ et $\frac{6+2}{2(1+i)} = \frac{8}{2(1+i)} = 2(1-i)$.

b) On remarque que l'expression $r^8 + (r')^8$ ne dépend pas du choix de r et r', on peut donc supposer $r = (1-i)$ et $r' = 2(1-i)$. Ainsi
$r^8 + (r')^8 = (1-i)^8 + [2 \cdot (1-i)]^8 = ((1-i)^2)^4[1+2^8] = (1-2i-1)^4(1+2^8) = (-2i)^4(1+2^8) = 2^4(-i)^4(1+2^8) = 2^4(1+2^8) = 2^4 + 2^{12} = 16 + 4096 = 4112.$

Remarques. b) on pouvait aussi remarquer $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1-i)^8 = \sqrt{2}^8 e^{-i2\pi} = 2^4$.
a) Comme $-6 = 2 \cdot (-3)$ est pair le "petit discriminant" est $\delta = (-3)^2 - (1+i)(4-4i) = 1^2$.
On obtient les racines $\frac{3-1}{1+i} = 1 - i$ et $\frac{3+1}{1+i} = 2(1-i)$ sous forme de fractions plus réduites.

début du problème (3 + 2 + 2 = 7 points)

5) a) L'ensemble $S_B = \{k \in \mathbf{Z}\ ;\ -47B \leq k \leq 70B\}$ a $70B - (-47)B + 1 = 117B + 1$ éléments car si m et n sont des entiers avec $m \leq n$ le nombre des entiers compris entre m et n est[3] $n - m + 1$. De même chacune des trois composantes d'un point de $C_B \subset \mathbf{Z}^3$ prend $B + 1$ valeurs donc C_B a $(B+1)^3$ éléments.
Si $B = 10$ l'ensemble S_{10} a donc 118 élément et l'ensemble C_{10} en a $11^3 = 1331$.

b) Comme la différence $(B+1)^3 - (117B+1) = B^3 + 3B^2 - 114B =$ $= B[B(B+3) - 114]$ est croissante [en B (≥ 1)] et vaut $9(9 \cdot 12 - 114) = -9 \cdot 6 < 0$ et $10(10 \cdot 13 - 114) = 160 > 0$ pour $B = 9$ et $B = 10$ l'ensemble C_B a strictement plus d'éléments que S_B si et seulement si $B \geq 10$.

Remarque. Le « si » (la partie[4]qui va être utilisé dans **6)**) de ce résultat s'obtient plus simplement [et par une preuve se généralisant à un nombre quelconque $n \geq 3$ de variables (Cf. devoir 4)] : comme $B \geq 1\ (\geq \frac{1}{117})$ le nombre $117B + 1$ d'éléments de S_B vérifie $117B + 1 \leq 117(B+1)$ donc si $B \geq 10$ on a $(B+1)^2 \geq (10+1)^2 = 121 > 117$ d'où $(B+1)^3 > 117(B+1) \geq 117B + 1$.

6) a) Si $x = (l, m, n) \in S_B$ on a $0 \leq l \leq B, \quad 0 \leq m \leq B$ et $0 \leq n \leq B$
donc $0 \leq 29 \cdot l \leq 29 \cdot B, \quad 0 \leq m \leq 41 \cdot B$ et $-47 \cdot B \leq -47 \cdot n \leq 0$ d'où

$$-47B \leq 29 \cdot l + 41 \cdot m - 47 \cdot n \leq 29 \cdot B + 41 \cdot B = 70B$$

donc $-47B \leq f(x) \leq 70B$, *c. a. d.* si $x \in C_B$ on a $f(x) \in S_B$: $f(C_B) \subset S_B$.

[1] (1.4.1 du poly), ou (seconde définition dans 1.4 du cours du 11/09/06).
[2] (1.4.2 du poly) ou (thm dans 1.4 du cours du 11/09/06).
[3] p.6 du poly. ou $f : \{k \in \mathbf{Z}; m \leq k \leq n\} \to \{1, \ldots n - m + 1\}, f(k) = 1 + k - m$ est bijective.
[4] et seule chose demandée à la lecture stricte de l'énoncé.

Question de cours et exercice un peu plus abstraits ($4 + 4 = 8$ points)

2) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si $g \circ f$ est injective alors[5] f est injective, mais g n'a aucune raison d'être injective ou surjective.

Preuve de l'injectivité de f : Soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ alors

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

donc, puisque $g \circ f$ est injective[6], on a $x_1 = x_2$ et f est injective.

Exemple avec g ni injective ni surjective : $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}, f(n) = n, g : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}, g(m) = |m|$
alors $g \circ f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, g \circ f(n) = |n| = n$ est l'inclusion de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ qui est injective.
Mais, comme $g(-1) = 1 = g(1)$ et $-1 \neq 1$ g n'est pas injective; et puisqu'il y a des réels qui ne sont pas valeur absolue d'entier (par exemple $-1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \ldots$) l'application g n'est pas surjective.

4) Pour $n = 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k! = 1! = 1 < 2 = 2 \cdot 1!$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 1$.

Si l'inégalité est vraie pour n alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (k+1)! < 2.k! + (k+1)!$ par l'hypothèse de récurrence.
D'autre part $k! = \frac{(k+1)!}{k+1}$ et, comme $n \geq 1$ on a $n + 1 \geq 2$, donc $\frac{2}{n+1} \leq 1$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (k+1)! < 2.k! + (k+1)! = (\frac{2}{n+1} + 1)(k+1)! \leq (1+1)(k+1)! = 2(k+1)!$$

d'où l'inégalité à l'ordre $n+1$ puisque dans cette suite d'égalités et de majorations, la première majoration (celle qui venait de l'hypothèse de récurrence) est stricte.

Fin du problème ($3 + \geq 2 = \geq 5$ points)

6) b) Si $B \geq 10$ on a vu dans **5)** b) que C_B a strictement plus d'éléments que S_B, *c.a.d* $\mathrm{Card}(C_B) > \mathrm{Card}(S_B)$ l'application g ne peut être injective[7] et il y a[8] $(l, m, n), (l', m', n') \in C_B$ avec $g(l, m, n) = g(l', m', n')$ et $(l, m, n) \neq (l', m', n')$.

Remarque C'était l'argument clef de la preuve "de motivation" (§5) dans le cours du 02/10/06.

c) Soit (l, m, n) et (l', m', n') donnés par **6)** b) pour $B = 10$.
si $(p, q, r) = (l - l', m - m', n - n')$ on a :

$$29 \cdot p + 41 \cdot q - 47 \cdot r = 29(l - l') + 41(m - m') - 47(n - n') =$$

$$= 29l + 41m - 47n - (29l' + 41m' - 47n') = g(l, m, n) - g(l', m', n') = 0$$

De $0 \leq l, l', m, m', n, n' \leq 10$ il vient

$$-10 \leq p = l - l', q = m - m', r = n - n' \leq 10 \quad c.\ a.\ d. \quad |p|, |q|, |r| \leq 10$$

Comme $(l, m, n) \neq (l', m', n')$ ces deux triplets ont une (au moins) de leurs composante différente[9] et l'un de $p = l - l', q = m - m', r = n - n'$ est non nul.

---

[5] (4. de 2.43 du poly) et/ou ((3) de la proposition de 6. dans 2.4 du cours du 02/09/06).
[6] (1 de 2.4.4 du poly) et/ou (1. du Thm dans 7 de 2.4 cours des 05 ou 06/10/06).
[7] contraposée de (1 de 2.4.4 du poly) et/ou (1. du Thm dans 7 de 2.4 cours des 05 ou 06/10/06).
[8] négation de (1 dans 2.4.2 du poly) ou (début de 6. dans 2.4 du cours du 02/09/06).
[9] (2.3.3 du poly) et/ou (1 de 2.4 du cours du 28 ou 29/09/06).