Analyse de Fourier 2

Régularité, convergence ponctuelle des séries de Fourier

Table des matières

Notation

On rappelle que $E = \{f : \{\mathbb{T} \to \mathbb{C} \,|\, \text{f intégrable}\}$ l'ensemble des fonctions intégrables sur le cercle et qu'à un tel $f \in E$ est associée la fonction 2π-périodique intégrable sur les intervalles bornés : $\tilde{f} = f \circ \rho : \mathbb{R} \underset{\rho}{\to} \mathbb{T} \underset{f}{\to} \mathbb{C}$. Une telle 2π-périodique intégrable sur les intervalles bornés $\tilde{f}$ s'écrit uniquement de cette forme $\tilde{f} = f \circ \rho$ et on fera l'abus de notation pour la fonction 2π-périodique $\tilde{f}$ au lieu de $\tilde{f}$, de a noter f par la même lettre que la fonction sur le cercle.

Présentation

On aura remarqué que les preuves des deux théorèmes d'approximations de Weierstrass se ressemblent beaucoup. On donnera un cadre commun expliquant cette resemblance et permettant d'obtenir le caractère local de la convergence des séries de Fourier, *c. a d.* si deux fonctions coïncident au voisinage d'un point alors la série de Fourier de l'une converge en ce point si et seulement si la série de Fourier de l'autre converge en ce point. Comme nous commencerons par déduire de la convergence en moyenne quadratique que la série de Fourier d'une fonction continuement dérivable, plus généralement dont la dérivée est intégrable (au sens de Riemann), converge uniformément vers cette fonction, ce résultat de *localité de la convergence des séries de Fourier* justifiera la convergence des séries de Fourier que l'on a observé en TD. On établira que les moyennes des sommes partielles des séries de Fourier des fonctions continues convergent vers la fonction, construira une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas en un point et terminera, comme annoncé, en établissant la convergence des séries de Fourier (sans faire de moyenne) pour les fonctions monotones par morceaux [1] résultat que l'on généralisera aux *fonctions à variations bornées*

1. Exercice : *une fonction monotone sur le cercle est constante.*

1 Régularité et noyaux.

1.1 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier et régularité.

1.1.1 Lemme. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définie sur le cercle et intégrable.*
Alors les coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$ de f tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.

Démonstration : Cela suit de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 =< f, f >< +\infty$ □

1.1.2 Définition et Proposition. Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définie sur le cercle est :

(i) *dérivable* si la fonction 2π-périodique correspondante $\tilde{f} = f \circ \rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable.
La fonction dérivée $\tilde{f}' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est alors 2π-périodique.
La fonction correspondante définie sur le cercle, notée $f' : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, est la *fonction dérivée de f*.

(ii) *intégrablement dérivable* [respectivement *continuement dérivable*] si elle est dérivable et sa fonction dérivée est intégrable au sens de Riemann [respectivement continue].

Démonstration : Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x)$ il vient en dérivant la relation $\tilde{f}'(x + 2\pi) = \tilde{f}'(x)$, ainsi $\tilde{f}'$ est 2π-périodique. □

1.1.3 Proposition. *Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est intégrablement dérivable alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :*

$$in\hat{f}(n) = \hat{f}'(n)$$

Démonstration : La fonction $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}, g(t) = f(t)e^{-int}$ est dérivable de dérivée est $g'(t) = f'(t)e^{-int} - inf(t)e^{-int}$.
Donc $0 = \Big[g\Big]_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int} - inf(t)e^{-int}\,dt = 2\pi\Big[\hat{f}'(n) - in\hat{f}(n)\Big]$ d'où $\hat{f}'(n) - in\hat{f}(n) = 0$. □

1.1.4 Corollaire. *La série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ intégrablement dérivable est normalment (donc uniformément) convergente.*
Ainsi une fonction intégrablement dérivable sur le cercle est somme uniforme de sa série de Fourier.

Démonstration : Par **1.1.3** si $n \neq 0$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}'(n)$. Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \sqrt{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}'(n)|^2} = |\hat{f}(0)| + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \parallel f' \parallel_2$$

□

1.1.5 Définition et Corollaire. Soit $0 \neq k \in \mathbb{N}$ un entier positif. Une fonction définie sur le cercle est *k-fois intégrablement dérivable* si la fonction 2π-périodique correspondante $\tilde{f}$ est k-fois dérivable et si sa dérivée $k^{\text{ième}}$ $\tilde{f}^{(k)}$ est intégrable au sens de Riemann. On note $f^{(k)} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ la fonction sur le cercle correspondant à $\tilde{f}^{(k)}$. En ce cas $\hat{f}(0) = 0$ et pour $1 \leq l \leq k$ et $n \neq 0$ on a :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{(in)^l}\hat{f}^{(l)}(n)$$

1.1.6 Corollaire. *Soit $0 < k \in \mathbb{N}$ un entier positif et $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ intégrable telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \cdot |n|^k < +\infty$$

alors f est k fois continuement dérivable et pour $1 \leq l \leq k$ de dérivée $l^{\text{ième}}$ somme uniforme de :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^l \hat{f}(n) e^{int}$$

Démonstration : L'hypothèse assure que pour $0 \leq l < k$ d'une part que les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^l \hat{f}(n) e^{int}$ convergent normalement (donc uniformément) donc en un point et d'autre part que les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^{l+1} \hat{f}(n) e^{int}$ de leurs dérivées convergent aussi normalement. On conclut par une récurence décroisssante de $l = k-1$ à $l = 0$ en appliquant le théorème de convergence uniforme des fonctions dérivables □

1.2 Approximation de fonctions continues à l'aide de noyaux.

(Noyaux convergeant en un point de continuité)

1.2.1 Théorème. *On se donne un choix pour tout $n \in \mathbb{N}$ de fontions k_n vérifiant :*

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n$ $[=< k_n, 1 >]$*

(ii) *Il y a $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_n| \leq K$*

(iii) *Pour tout $\delta \in]0, \pi[$ on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n| = 0$*

Alors si $f \in E$ est continue en $t \in \mathbb{T}$ on a :

$$f * k_n(t) \underset{\text{Déf}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot k_n(t-x)\, dx \to f(t)$$

De plus si f est continue sur $\mathbb{T}$ (respectivement sur un intervalle ouvert $]a, b[\subset \mathbb{T}$)
la convergence est uniforme sur $\mathbb{T}$ (respectivement sur tout sous-intervalle fermé $[c, d] \subset]a, b[$).

Démonstration : Comme f est intégrable elle est bornée et il y a $M > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a $|f't)| \leq M$.
Soit $\epsilon > 0$, comme f est continue en t il y a $\delta \in]0, \pi[$ tel que pour tout $s \in \mathbb{T}$ avec $|s - t| \leq \alpha$ on ait $|f(s) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2K}$.
Soit alors, d'après la troisième hypothèse $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ on ait $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n| \leq \dfrac{\epsilon}{4M}$.
Par définition de $f * k_n$, périodicité et changement de variable $x = t + u$ on a

$$f * k_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot k_n(t-x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\delta}^{t-\delta+2\pi} f(x) \cdot k_n(t-x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{2\pi-\delta} f(t+u) \cdot k_n(u)\,du$$

D'après la première hypothèse et par périodicité $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cdot k_n(-u)\,du = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\delta}^{2\pi-\delta} f(t) \cdot k_n(-u)\,du$. D'où

$$\Big|f * k_n(t) - f(t)\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\delta}^{\delta}(f(t+u) - f(t)) \cdot k_n(u)\,du + \int_{\delta}^{2\pi-\delta}(f(t+u) - f(t)) \cdot k_n(-u)\,du\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(t+u) - f(t)| \cdot |k_n(-u)|\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|f(t+u) - f(t)| \cdot |k_n(-u)|\,du \leq \frac{\epsilon}{2K}K + 2M\frac{\epsilon}{4M} = \epsilon$$

Si f est continue sur $\mathbb{T}$ (ou $]a, b[$) on applique la continuité uniforme sur $\mathbb{T}$ (ou près de $[c, d]$).

□

1.2.2 Remarque. Si les $k_n \geq 0$ sont à valeurs positives ou nulles la seconde condition dans les hypothèses du théorème suit de la première. En ce cas la troisième condition est impliquée par la plus vérifiable : quand n tend vers l'infini, k_n tend vers 0 sur $]0, 2\pi[$, uniformément sur les sous-intrvalles bornés.

1.2.3 Exemple. $k_n(x) = 2\pi T_n(x) = \pi\delta_n\Big(\dfrac{1+\cos(x)}{2}\Big)^n = \pi\delta_n \cos(\frac{t}{2})^n$ où $\delta_n = \Big[\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n(\frac{t}{2})\,dt\Big]^{-1}$ [Voir **1.3.** de **Deux théorèmes d'approximations.**]

1.2.4 Complément. *Si de plus les k_n sont des fonctions paires et $g \in E$ (quotient d'une fonction 2π-périodique $\mathcal{R}$-intégrable encore notée g) a en t des limites à gauche $g(t_-)$ et à droite $g(t_+)$ alors :*

$$g * k_n(t) \overset{\text{Déf}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) \cdot k_n(t-x)\,dx \to \frac{1}{2}(g(t_-) + g(t_+))$$

1.2.5 Remarques.

1. Ceci conduit certains auteurs [1)] à considérer, pour les séries de Fourier, les sous-espaces de E contenant les fonctions continues et sur lesquels le produit scalaire $<, >$ est non dégénéré, comme celui des fonctions g continues par morceaux vérifiant en tout point $g(t) = \frac{1}{2}(g(t_-) + g(t_+))$.
2. Les fonctions monotones, plus généralment les fonctions dans le sous-espace de E engendré par les fonctions monotones [2)] ont en tout point une limite à gauche et une limite à droite et, contrairement aux fonctions continues (pour lesquelle la série de Fourier ne converge pas nécéssairement partout), vérifient le théorème de Dirichlet (qui clôturera le cours) : *En tout point la série de Fourier d'une fonction à variation bornées converge vers la moyenne de ses limites à droite et à gauche.*

[1)] par exemple 18.2 d'un cours d'analyse de J.-.E. Rombaldi : http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/řombaldi/Capes/AnalyseChap18.pdf

[2)] Elles sont différence de deux fonctions croissantes et, suite à une une définition plus intrinsèque, sont dites *à variations bornées.*

Démonstration du complément : Soit $f_t = f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, si $x \in t+2\pi\mathbb{Z}$, $f_t(x) = \frac{1}{2}(g(t_-)+g(t_+))$ et si $x \notin t+2\pi\mathbb{Z}$, $f_t(x) = \frac{1}{2}(g(2t-x)+g(x))$. Comme $2t-(t+h) = t-h$ on a $f_t(t+h)$ tend, si $h > 0$ tend vers 0 vers $\frac{1}{2}(g(t_-)+g(t_+)) = f_t(t)$ et si $h < 0$, $f(t+h)$ tend vers 0 vers $\frac{1}{2}(g(t_+)+g(t_-)) = \frac{1}{2}(g(t_-)+g(t_+)) = f(t)$ la fonction f est continue en t. Ainsi le théorème **1.2.1** s'appliqe et $f * k_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} f(t) = \frac{1}{2}(g(t_-)+g(t_+))$. D'autre part $f * k_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(x)\cdot k_n(t-x)\,dx$ qui par le changement de variable $x = t+u$ est $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)\cdot k_n(-u)\,du$, puis par définition de g vaut $f * k_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(g(t-u)+g(t+u))\cdot k_n(-u)\,du = \dfrac{1}{2\pi}[\frac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\cdot k_n(-u)\,du + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t+u)\cdot k_n(-u)\,du]$ soit, par parité de k_n dans la première intégrale et le changement de variable $x = t+u$ dans la seconde : $f * k_n(t) = \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\cdot k_n(u)\,du + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{t-\pi}^{t+\pi} g(x)\cdot k_n(t-x)\,dx]$ puis par le changement de variable $y = t-u$ dans la première intégrale et la définition de $g * k_n(t)$ dans la seconde :
$f * k_n(t) = \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{t-\pi}^{t+\pi} g(y)\cdot k_n(t-y)\,dy + g * k_n(t)] = \dfrac{1}{2}[g * k_n(t) + g * k_n(t)]$ et $g * k_n(t) = f * k_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

□

1.2.6 Remarque. Si la fonction g n'est pas continue, puisqu'une somme uniforme $\hat{f}(0) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{-int}$ de fonctions continues $\hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{-int}$ est continue, la convergence dans le complément **1.2.4** ne peut être uniforme.

1.2.7 Exercice. Expliciter le point de la démonstration du théorème **1.2.1** y donnant dans le cas où f est continue la convergence uniforme qui ne passe pas dans le cas du complément **1.2.4** si g vérifie en tout point $t \in \mathbb{T}$ les hypothèses de ce complément, mais admet au moins une discontinuité.

2 Convergence au sens de Césaro des séries de Fourier des fonctions continues.

2.1 Calculs trigonométriques.

2.1.1 Lemme. *Soit* $M \in \mathbb{Z}, L \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ *alors :*

$$\sum_{k=M}^{M+L} e^{i(\alpha+k)t} = e^{i(\alpha+M+\frac{L}{2})} \frac{\sin(\frac{L+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Démonstration : $\sum_{k=M}^{M+L} e^{i(\alpha+k)t} = e^{i(\alpha+M)t} \sum_{k=0}^{L} e^{i\,kt}$ et comme $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, e^{it} \neq 1$, la série géométrique $\sum_{k=0}^{L} e^{i\,kt} = \sum_{k=0}^{L} \left(e^{i\,t}\right)^k$, de raison $e^{it} \neq 1$ vaut : $\frac{e^{i(L+1)t}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{i\frac{L+1}{2}t}(e^{i\frac{L+1}{2}t} - e^{-i\frac{L+1}{2}t})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})} = \frac{e^{i\frac{L}{2}t} \cdot e^{i\frac{t}{2}} \cdot 2i \cdot \sin(\frac{L+1}{2}t)}{e^{i\frac{t}{2}} \cdot 2i \cdot \sin(\frac{t}{2})} = e^{i\frac{L}{2}t} \frac{\sin(\frac{L+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ d'où le résultat : $\sum_{k=M}^{M+L} e^{i(\alpha+k)t} = e^{i(\alpha+M+\frac{L}{2})} \frac{\sin(\frac{L+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$. □

En appliquant ce lemme à $\alpha = 0, M = -N$ et $L = 2N$ puis en prenant parties réelles et imaginaires du cas général avec $L = N$ et, dans le dernier point prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ et $M = 0$ on obtient :

2.1.2 Corollaire. *Soit* $M \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N},\ t, \alpha \in \mathbb{R}$ *avec* $t \not\equiv 0 \bmod(2\pi)$ *alors :*

(i) $\sum_{k=-N}^{N} e^{i\,k\,t} = \frac{\sin([N+\frac{1}{2}]t)}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin([\frac{1}{2}+N]t)}{\sin(\frac{t}{2})}$

(ii) $\sum_{k=M}^{M+N} \cos([\alpha+k]t) = \cos([\alpha+M+\frac{N}{2}]t) \frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$

(iii) $\sum_{k=M}^{M+N} \sin([\alpha+k]t) = \sin([\alpha+M+\frac{N}{2}]t) \frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$

En particulier

$$\sum_{n=0}^{N} \sin([\frac{1}{2}+n]t) = \sin([\frac{1+N}{2}]t) \frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin^2([\frac{1}{2}+N]t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

2.1.3 Remarque. Les deux derniers points de ce corollaire (et donc le Lemme) peuvent aussi s'obtenir en utilisant les relations d'addition $2\cos(a) \cdot \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ et $2\sin(a) \cdot \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ pour $a = (\alpha+k)t$ et $b = \frac{t}{2}$, faire se télescoper les sommes, puis les mêmes formules dans l'autre sens $\sin(B) - \sin(A) = 2\cos(\frac{A+B}{2}) \cdot \sin(\frac{B-A}{2})$ et $\cos(A) - \cos(B) = 2\sin(\frac{A+B}{2}) \cdot \sin(\frac{B-A}{2})$ permettent de nettoyer le résultat.

2.2 Noyaux de Dirichlet et Fejer, le théorème de Féjer.

2.2.1 Définition et Corollaire. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. La valeur en t du

$N^{\text{ième}}$ *noyau de Dirichlet* est $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n, D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}$ qui

$$\text{si } t \equiv 0 \bmod(2\pi) \text{ vaut } \; D_N(t) = 2N+1 \text{ et } \; D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \text{ sinon.}$$

$N^{\text{ième}}$ *noyau de Fejer* est, $K_N = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N, K_N(t) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N(t)$ qui,

si $t \equiv 0 \bmod(2\pi)$ vaut $K_N(t) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 2n+1 = N+1$ et $K_N(t) = \dfrac{1}{N+1}\dfrac{\sin^2(\frac{N+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{t}{2})}$ sinon.

2.2.2 Remarques.

1. Comme $\dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e_0 = 1$ et si $n \neq 0$, $\dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e_n = 0$ les noyaux de Dirichlet $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ et Fejer $K_N = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N$ vérifient la première hypothèse du théorème **1.2.1**
2. Les K_N étant à valeurs positives ou nulles vérifient donc ausi la seconde hypothèse de **1.2.1** et la troisième, puisque si $\delta \in]0,\pi[$ et $|t| \in [\delta,\pi]$ on a $0 \leq K_N(t) \leq \dfrac{1}{N+1}\dfrac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \leq \dfrac{\pi^2}{(N+1)\delta^2} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$
3. Par contre[3)] les D_N ne vérifient ni la seconde ni la troisième hypothèse de **1.2.1**.
4. Soit $f \in E$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f * e_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{in(t-x)}\,dx = \hat{f}(n)e^{int}$$

la $N^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f est $S_N(f) = f * D_N$ et

$$f * K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f * D_n = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$$

est la moyenne des $N+1^{\text{ième}}$ premières sommes partielles de la série de Fourier de f.

Ces remarques et le théorème **1.2.1**. donnent alors le :

3) **2.2.3 Exercice.** Soit $\delta \in]0,\pi[$, $k, N \in \mathbb{N}$ avec $0 < k \leq \frac{N-1}{2}$ et $N \geq \dfrac{2\pi}{\delta}$. Vérifier $\left|\int_{\frac{2(k-1)\pi}{N+1}}^{\frac{2k\pi}{N+1}} D_N(t)\,dt\right| \geq \dfrac{4}{N+1}\cdot\dfrac{1}{\sin(\frac{k\pi}{N+1})} \geq \dfrac{2\pi}{k}$.
En déduire $\dfrac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |D_N(t)|\,dt \geq 2\log(\frac{4\pi}{7\delta})$. En particulier : $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(t)|\,dt \geq \dfrac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |D_N(t)|\,dt$ n'est pas borné indépendamment de N et $\dfrac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |D_N(t)|\,dt$ ne tend pas vers 0 quand N tend vers l'infini.

2.2.4 Corollaire et Définition. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continue alors les moyennes $\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$ des $N+1^{\text{ièmes}}$ premières sommes partielles de la série de Fourier de f convergent uniformément vers f. :* (Théorème de Fejér)

Une fonction continue sur le cercle est limite uniforme au sens de Césaro *de sa série de Fourier.*

2.2.5 Rappel. 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente[4].

Alors la suite dite *de Césaro associèe à* la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_n$ des moyennes des $n+1$ premiers termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Démonstration : Comme la suite est convergente elle est bornée : il y a $A \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq A$. Soit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ et $\epsilon > 0$.

Il y a $N \geq 0$ tel que pour tout $n > N$ on ait $|a - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ donc pour $n \geq (N+1)[\frac{4A}{\epsilon} + 1]$ on a :

$$|a - c_n| = \frac{1}{n+1}|(n+1)a - \sum_{k=0}^{n} a_n| = \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{k=0}^{n} a - a_n\Big| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a - a_n| \leq \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{k=0}^{N}|a - a_n| + \sum_{k=N+1}^{n}|a - a_n|\Big] \leq \frac{N+1}{n+1}2A + \frac{n-N}{n+1}\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

2. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens de Césaro* si sa suite de Césaro associée $c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_n$ converge. Il y a des suites convergentes au sens de Césaro mais non convergente.

2.2.6 Exemple. La suite $a_n = (-1)^n$ ne converge pas mais, puisque les termes de la suite de Césaro associée sont

$$c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{(n+1)(1-(-1))} = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}$$

sont nuls si $n = 2k+1$ est impair et valent $c_{2k} = \frac{1}{n+1}$ si $n = 2k$ est pair elle converge au sensde Césaro vers 0.

[4] de nombres complexes, ou fonctions définie sur un intervalle, en ce dernier cas la convergence peut être soit simple soit uniforme

3 Convergence ponctuelle des séries de Fourier.

3.1 Une fonction continue de série de Fourier non convergente en zéro.

3.1.1 Lemme.

$$D_N(t) = K_N(t) + \sum_{k=-N}^{N} \frac{|k|}{N+1} \cdot e^{ikt}$$

Démonstration : $(N+1)K_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=|k|}^{N} e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} (N+1-|k|) \cdot e^{ikt} = (N+1) \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} - \sum_{k=-N}^{N} |k| \cdot e^{ikt} = (N+1)D_N(t) - \sum_{k=-N}^{N} |k| \cdot e^{ikt}$. □

3.1.2 Corollaire. *Pour tout entier $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ positif et réel $t \in \mathbb{R}$ on a :* $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n}\right| \leq \frac{\pi}{2} + 1$

Démonstration : Soit $f \in E$ quotient de la fonction 2π-périodique vérifiant $f(0) = 0$ et pour $0 < t < 2\pi$, $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$, elle est impaire. Ses coeficients de Fourier sont $\hat{f}(0) = 0$ et, si $n \neq 0$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} e^{-int}\, dt = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi \cdot in} \int_0^{2\pi} e^{-int}\, dt = \dfrac{-\pi \cdot e^{-in2\pi} - \left(\pi \cdot e^{-in2\pi}\right)}{-4\pi \cdot in} = \frac{1}{2in}$.

Donc la $N^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f est $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n} = S_N(f)$. Ainsi d'après le lemme **3.1.1** :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n} = f * D_N(t) = f * K_N(t) + \sum_{k=-N}^{N} \frac{|k|}{N+1} \cdot f * e_k(t) = f * K_N(t) + \sum_{k=-N}^{N} \frac{|k|}{N+1} \cdot \hat{f}(k) e^{ikt} = f * K_N(t) + \sum_{l=1}^{N} \frac{l}{N+1} \cdot \frac{\sin(lt)}{l}$ d'où :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n}\right| \leq \left|f * K_N(t)\right| + \frac{N}{N+1} \leq \sup|f| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_N(t)|\, dt + 1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(t)\, dt + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$$ □

3.1.3 Remarque. Une forme faible du corollaire et la convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier s'obtiennent aussi élémentairement comme suit :

1. Si $x \in]0, 2\pi[$, on a : $x - \pi + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} = \int_\pi^x 1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos(nt) dt = \int_\pi^x \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt = \left[-\frac{2}{2N+1} \frac{\cos(((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right]_\pi^x + \int_\pi^x \frac{2}{2N+1} \cos(((N+\frac{1}{2})t) \frac{d}{dt} \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} dt$

   donc, si $\psi(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} - \psi(x)\right| \leq \frac{2}{2N+1} \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ et, uniformément sur tout sous intervalle fermé, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge vers $\psi(x)$.

2. En coupant l'intégrale à $t = \frac{\pi}{2N+1}$, la majoration $\left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right| \leq \frac{(2N+1)\pi}{2}$ donne uniformément sur $]0, 2\pi[$ la majoration $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} - \psi(x)\right| \leq 2 + \frac{\pi^2}{2}$

3. Ainsi la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ convergence en moyenne quadratique vers ψ et comme, si $0 < \alpha < \beta < \pi$ $1_{]\alpha,\beta[} = \frac{1}{\pi}[\psi(x - \beta) - \frac{\beta}{2} - (\psi(x - \alpha) - \frac{\alpha}{2})]$, toute fonction en escalier, donc toute fonction Riemann-intégrable, est limite en moyenne quadratique de sa série de Fourier.

3.1.4 Exercice. 1. Soit $0 < x < \pi$ et $M < N \in \mathbb{N}$. Par une sommation d'Abel établir la majoration $\Big|\sum_{n=M+1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}\Big| \le \frac{\pi}{(M+1)x}$.

2. Soit $a > 0$. En choisissant M tel que $M \le \frac{\pi}{ax} \le M+1$ en déduire $\Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}\Big| \le \frac{\pi}{a} + a$, puis la majoration $\Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}\Big| \le 2\sqrt{\pi}$, ainsi que $2\sqrt{\pi} > \frac{\pi}{2} + 1$.

3.1.5 Lemme. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $4^{(n+1)^2} - 2^{(n+1)^2} > 4^{n^2} + 2^{n^2}$*

Démonstration : $4^{(n+1)^2} - 4^{n^2} = \left(2^{(n+1)^2}\right)^2 - \left(2^{n^2}\right)^2 = \left(2^{(n+1)^2} - 2^{n^2}\right)\left(2^{(n+1)^2} + 2^{n^2}\right) = 2^{n^2}\left(2^{2n+1} - 1\right)\left(2^{(n+1)^2} + 2^{n^2}\right) \ge 2^{(n+1)^2} + 2^{n^2}$ □

3.1.6 Théorème (Exemple de (à la) Fejér). *La série*[5] $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(4^{n^2}t)}{n^2} \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin(kt)}{k}$ *converge normalement donc uniformément vers une fonction continue dont*[6] *la série de Fourier étant :*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=-2^{n^2}}^{-1} \frac{2}{k\cdot n^2}\cos(4^{n^2}-k)t) - \sum_{1}^{k=2^{n^2}} \frac{2}{k\cdot n^2}\cos(4^{n^2}+k)t)\Big]$$

$$= \frac{2}{2\cdot 1}\cos(2t) + \frac{2}{1\cdot 1}\cos(3t) - \frac{2}{1\cdot 1}\cos(5t) - \frac{2}{2\cdot 1}\cos(6t) + \cdots$$

$$\cdots + \Big[\frac{2}{2^{n^2}\cdot n^2}\cos((4^{n^2}-2^{n^2})t) + \cdots + \frac{2}{1\cdot n^2}\cos((4^{n^2}-1)t)\Big] - \Big[\frac{2}{1\cdot n^2}\cos((4^{n^2}+1)t) + \cdots + \frac{2}{2^{n^2}\cdot n^2}\cos((4^{n^2}+2^{n^2})t)\Big] + \cdots$$

ne converge pas[7] *en $t = 0$.*

[5] puisque, d'après **3.1.2**, $\Big|\frac{\sin(4^{n^2}t)}{n^2} \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin(kt)}{k}\Big| \le \frac{1}{n^2}(\frac{\pi}{2}+1)$

[6] car $4\sin(4^{n^2}t)\sin(kt) = 2\cos(4^{n^2}-k)t) - 2\cos(4^{n^2}+k)t)$ et, d'après **3.1.5**, pour $n \in \mathbb{N}$ les intervalles entiers

$$\ldots [[4^{n^2}-2^{n^2}, 4^{n^2}-1]], [[4^{n^2}+1, 4^{n^2}+2^{n^2}]], [[4^{(n+1)^2}-2^{(n+1)^2}, 4^{n^2}-1]], \ldots$$

sont deux à deux disjoints.

[7] puisque la somme des n^2 termes de degrés de $4^{n^2} - 2^{n^2}$ à $4^{n^2} - 1$, étant $\sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{2}{k\cdot n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{l=0}^{n^2-1}\sum_{k=1}^{2^l} \frac{2}{2^l+k}$, au moins $\frac{2}{n^2}\sum_{l=0}^{n^2-1} 2^l \frac{1}{2^{l+1}} = \frac{2}{n^2} n^2 \frac{1}{2} = 1$, ne tend pas vers 0.

3.2 Une coqueterie calculatoire, sommes et noyaux primées.

3.2.1 Définition et Proposition. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres ou de fonctions et $p,q\in\mathbb{Z}$ avec $p\leq q$ la *somme primée de* p *à* q *des* a_k est $\sum_{k=p}^{q}{}' a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k - \frac{1}{2}[a_p+a_q]$. Ces sommes primées[8] vérifient une relation de Chasles : si $r\leq s\leq t$ on a $\sum_{k=p}^{r}{}' a_k = \sum_{k=p}^{q}{}' a_k + \sum_{k=q}^{r}{}' a_k$.

[8] alors que pour les sommes ordinaires il y a un décalage : si $n<p\leq q$ ou $p\leq q<r$ on a

$$\sum_{k=n}^{q} a_k = \sum_{k=n}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{q} a_k,\ \sum_{k=p}^{r} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{r} a_k$$

Si $f\in E$, on a : $S^*(f)_N \overset{\text{Déf}}{=} \sum_{k=-N}^{N}{}' \hat{f}(n)\, e_n = f * D_N^*$ où le $N^{\text{ième}}$ *noyau de Dirichlet primé* est

$$D_N^*(t) \overset{\text{Déf}}{=} \sum_{k=-N}^{N}{}' e^{int},\ D_N^*(0)=2N \text{ et si } \ t\not\equiv 0 \bmod(2\pi),\ D_N^*(t) = \frac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cdot\sin(Nt) = \mathrm{cotg}(\frac{t}{2})\cdot\sin(Nt)$$

Démonstration : si $t\not\equiv 0 \bmod(2\pi)$, $D_N^*(t) = \dfrac{\sin((\frac{1}{2}+N)t)-\sin(\frac{t}{2})\cos(Nt)}{\sin(\frac{t}{2})} = \dfrac{\cos(\frac{t}{2})\sin(Nt)+\sin(\frac{t}{2})\cos(Nt))-\sin(\frac{t}{2})\cos(Nt)}{\sin(\frac{t}{2})} = \dfrac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cdot\sin(Nt)$ □

3.2.2 Exercices. 1. Le $N^{\text{ième}}$ *noyau de Fejér primé* est $K_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}{}' D_n^*$. Prouver :

(a) $K_N^*(0)=N$ et si $t\not\equiv 0 \bmod(2\pi)$, $K_N^*(t) = \frac{1}{N}\mathrm{cotg}(\frac{t}{2})\sum_{n=0}^{N}{}'\sin(nt) = \frac{1}{N}\cdot\mathrm{cotg}^2(\frac{t}{2})\cdot\sin^2(\frac{Nt}{2})$.

(b) $D_N^* = K_N^* + \sum_{k=-N}^{N}{}' \frac{|k|}{N} e_k$,

2. Comme dans la **Remarque 3.1.3** établir pour la primitive $PD_N^*(x) = \int_\pi^x D_N^*(t)dt$ du $N^{\text{ième}}$ *noyau de Dirichlet primé* et tout $x\in]0,2\pi[$:

(a) les relation $PD_N^*(x) = \frac{2\sin^2(\frac{Nx}{2})}{N}\mathrm{cotg}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{N}\int_\pi^x \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt = K_N^*(x)\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) + \int_\pi^x K_{N-1}(t)dt$, en déduire $\frac{1}{N}\int_\pi^0 \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt = -\pi$.

(b) la majoration $|PD_N^*(x)|\leq\pi$, plus précisément pour $x\in[0,\pi]$ l'encadrement : $-\pi\leq PD_N^*(x) = -PD_N^*(2\pi-x)\leq 2$.

3.3 Localité de la convergence ponctuelle.

3.3.1 LEMME. *Soit $f \in E$ et, si $h \in \mathbb{R}$, $f_h \in E$ définie par $f_h(t) = f(h+t)$.*
Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}_h(n) = \hat{f}(n) \cdot e^{inh}$, ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N(f_h)(0) = S_N(f)(h)$

Démonstration : $\hat{f}_h(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t+h)e^{-int}\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_h^{h+2\pi} f(s)e^{-in(s-h)}\,ds = \dfrac{1}{2\pi}\int_h^{h+2\pi} f(s)e^{-ins}e^{inh}\,ds = \left[\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right]e^{inh} = \hat{f}(n)\cdot e^{inh}$ □

3.3.2 THÉORÈME. *Soit $f, g \in E$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f - g = O(|t-t_0|)$. Alors :*
la série de Fourier de f converge en t_0 si et seulement si la série de Fourier de g converge en t_0.

Démonstration : Comme $f(t) - g(t) = O(|t-t_0|)$ si et seulement si $f_{t_0}(s) - g_{t_0}(s) = O(|s|)$, d'après le lemme **3.3.1** il suffit de traiter le cas $t_0 = 0$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $S_N(f) = S_N(g) + S_N(f-g)$ et, puisque, d'après le lemme de Lebesgue $S_N(h)(0) - S_N^*(h)(0) = \frac{1}{2}[\hat{h}(-N) + \hat{h}(-N)] \underset{N\to\infty}{\to} 0$,
il suffit d'établir si $h \in E$ vérifie $h = O(|t|)$ alors $S_N^*(h)(0)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.
Soit k, définie par si $t \equiv 0 \bmod (2\pi)$, $k(0) = 0$ et sinon $k(t) = h(t)\cdot \operatorname{cotg}(\frac{t}{2})$. La fonction k est dans E donc, encore par Lebesgue $\hat{k}(N), \hat{k}(-N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$,
d'où le résultat puisque $S_N^*(h)(0) = h * D_N^*(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\operatorname{cotg}(\frac{-t}{2})\cdot\sin(-Nt)\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t)\sin(Nt)\,dt = \dfrac{1}{2i}[\hat{k}(N) - \hat{k}(-N)] \underset{N\to\infty}{\to} 0.$ □

3.3.3 COROLLAIRE. *Soit $f \in E$ et $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que f est dérivable sur $[a,b]$ avec $f'_{|[a,b]}$ intégrable*
alors pour tout $t \in]a,b[$ la série de Fourier de f converge en t.

Démonstration : Soit $a < c < d < t < e < f < b$ avec $f - c \leq 2\pi$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $u \leq c, f \leq v, \varphi(u) = 0 = \varphi(v)$, si $d \leq w \leq e, \varphi(s) = 1$ de classe C^1
[par exemple pour $c \leq r \leq d, \varphi(r) = \dfrac{(r-c)^2(3d-c-2r)}{(d-b)^3} = \displaystyle\int_c^r \dfrac{(d-\alpha)(\alpha-c)}{(d-c)^3}\,d\alpha$ et pour $e \leq s \leq f, \varphi(r) = \dfrac{(f-s)^2(f+2s-3e)}{(f-e)^3} = \displaystyle\int_f^s \dfrac{(f-\alpha)(\alpha-e)}{(f-e)^3}\,d\alpha$].
Alors la fonction $f_{|[c,f]}\cdot\varphi_{|[c,f]}$ se prolonge (par 0 sur $\mathbb{T}\setminus[c,f]$) en une fonction $g \in E$ qui est intégralement dérivable, donc a sa série de Fourier convergente vers g et étant égale à f près de t vérifie l'hypothèse $f(s) - g(s) = 0 = O(s-t)$ du théorème **3.3.2** d'où le résultat. □

3.3.4 Exemple. Soit $\mathcal{B}_1 \in E, \mathcal{B}_1(0) = 0$ et si $t \in]0, 2\pi[, \mathcal{B}_1(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ (en **3.1.2**) on a uniformément majorés les sommes partielles $S_N(\mathcal{B}_1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\sin(nt)}{n}$).

Pour tout $t \in]0, 2\pi[$, comme $\mathcal{B}_1$ y est de classe C^1, on a $\dfrac{\pi - t}{2} = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{\sin(nt)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nt)}{n}$. En $t = 0$ il y a aussi convergence, puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\dfrac{\sin(n0)}{n} = 0 = \mathcal{B}_1(0)$.

3.3.5 Exercice. Vérifier $2S_N(\mathcal{B}_1)' = D_N - 1, 2S_N^*(\mathcal{B}_1)' = D_N^* - 1$ et $D_N^* - K_N^* = \dfrac{d}{dt}\{K_N^*(t)\operatorname{tg}(\dfrac{t}{2})\}$

3.4 Le théorème de Dirichlet.

3.4.1 LEMME. *Les intégrales des noyaux de Dirichlet D_N sur les sous-intervalles de $[-\pi,\pi[$ sont uniformément bornées : Il y a $M>0$ tel que pour tout $N\in\mathbb{N}$ et $-\pi\le a\le b\le\pi$ on a*

$$\left|\int_a^b D_N\right|\le M$$

Démonstration : Comme $\displaystyle\int_0^x D_N(t)=x+2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$ cela suit du corollaire **3.1.2**. □

3.4.2 THÉORÈME. *Soit $f\in E$ et $t\in\mathbb{R}$ tel qu'il y a $c>0$ avec f monotone sur $]t-c,t[$ et sur $]t,t+c[$. Alors la série de Fourier de f converge en t vers la moyenne de ses limites à droite et à gauche :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat f(n)e^{int}=\frac{1}{2}[f_-(t)+f_+(t)]$$

Démonstration : Soit $L\in E$ telle que si $s\in]t-\pi,t[$, $L(s)=f_-(t)$, si $s\in]t,t+\pi[$, $L(s)=f_+(t)$ et $L(t\pm\pi)=\frac{1}{2}[f_-(t)+f_+(t)]$. On a (Le noyau de Dirichlet étant pair : $S_N(L)(t)=L*D_N(t)=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}L(x)D_N(t-x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f_-(t)D_N(-x)\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f_+(t)D_N(-x)\,dx=\frac{1}{2}[f_-(t)+f_+(t)]$.
Comme $f=L+h$ où $h=f-L$ est monotone sur $]t-c,t[$ et sur $]t,t+c[$ et a 0 pour limite en t il suffit de montrer le théorème pour un tel h : $S_N(h)\underset{N\to 0}{\to}0$ *c. a d.* pour tout $\epsilon>0$, il y a N_0 tel que pour $N\ge N_0$ on a $|S_N(h)|\le\epsilon$
Soit $b\in]0,c[$ tel que (si M donné par le lemme **3.4.1**), $|h(t-b)|+|h(t+b)|\le\frac{\pi}{M\epsilon}$.
On considère $h_b\in E$ la fonction vérifiant si $s\in]t-b,t+b[$, $h_b(s)=h(s)$ et $h_b(s)=0$ sinon, donc

$$S_N(h_b)\frac{1}{2\pi}\int_{t-b}^{t+b}h(x)D_N(t-x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{t-b}^{t}h(x)D_N(t-x)\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_t^{t+b}h(x)D_N(t-x)\,dx$$

Puisque h est monotone sur les intervales $[t-b,t]$ et $[t,t+b]$ et a 0 pour limite en t, le second théorème de la moyenne donne $u\in[t-b,t]$ et $v\in[t,t+b]$ tels que $S_N(h_b)(t)=\displaystyle\frac{1}{2\pi}h(t-b)\int_{t-b}^{u}D_N(t-x)\,dx+\frac{1}{2\pi}h(t+b)\int_v^{t+b}D_N(t-x)\,dx$. D'où $|S_N(h_b)(t)|\le\frac{1}{2\pi}[|h(t-b)|M+|h(t+b)|M|\le\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{M\epsilon}M=\frac{\epsilon}{2}$
D'après **3.3.2** $S_N(h-h_b)(t)\underset{N\to 0}{\to}0$ et il y a N_0 tel que pour $N\ge N_0$ on a $|S_N(h-h_b)(t)|\le\frac{\epsilon}{2}$ d'où $|S_N(h)(t)|\le|S_N(h-h_b)(t)|+|S_N(h_b)(t)|\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ □

3.4.3 Remarque. Si f est dérivable par morceaux de dérivée Riemann-intégrable (en particulier si f est de classe C^1 par morceaux), mais sans supposer f monotone près de t on peut donner une preuve élémentaire dans l'esprit de la **Remarque 3.1.3** (et/ou de l'**Exercice 3.2.2** 2.) :

Démonstration : $S_N(f)(t) = f * D_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-2\pi}^{t} f(x)D_N(t-x)dx$. En utilisant, comme en **3.1.3** la primitive $PD_N(x) = \int_\pi^x D_N(u)du$ de D_N et des intégrations par partie sur chaque intervalle de dérivabilité de f dans $[t-2\pi, t]$ on a :

$$S_n(f)(t) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\pi}\Big[-f_-(t)PD_N(0) + f_+(t)PD_N(2\pi) + \sum_{t-2\pi<x<t}(f_+(x)-f_-(x))PD_N(t-x) + \int_{t-2\pi}^{t} f'(x)PD_N(t-x)dx\Big]\Big]$$

Comme $PD_N(2\pi) = \pi = -PD_N(0)$ et d'après **3.13** PD_N est borné sur $[0, 2\pi]$ indépendement de N et, si $0 < \epsilon < \pi$, tend uniformément vers 0 sur $[\epsilon, 2\pi-\epsilon]$, les deux premiers termes sont $\frac{f_-(0)+f_+(0)}{2}$ et les deux restes somme finie de sauts et intégral tendent vers 0 quand N tend vers l'infini.

$\square$

3.5 Fonctions à Variations bornées.

3.5.1 Définition et Proposition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_k < \cdots < a_N = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. La *variation* de f sur α est $Var(f;\alpha) = \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) - f(a_{k-1})|$.

Par l'inégalité triangulaire on a :

$$|f(b) - f(a)| = \sum_{k=1}^{N}(f(a_k) - f(a_{k-1}))| \leq \sum_{k=1}^{N}|f(a_k) - f(a_{k-1})| = Var(f;\alpha)$$

et si α est raffiné par une subdivision $\alpha' < \alpha$ alors : $Var(f;\alpha) \leq Var(f;\alpha')$.

3.5.2 Définition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si pour $\{Var(f;\alpha)\,;\, \alpha \in A(a, b)\}$ est borné on dit que f est à *variations bornée.* La *variation de f sur* $[a, b]$ est $Var(f; [a, b]) = \sup_{\alpha\in A(a,b)} Var(f;\alpha)$.

3.5.3 Lemme. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est à variations bornées et $c \in [a, b]$ alors les restrictions $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont à variations bornées et $Var(f; [a, b]) = Var(f_{|[a,c]}; [a, c]) + Var(f_{|[c,b]}, [c, b]$ Si $[c, d] \subset [a, b]$ est un sous intervalle de $[a, b]$ on note $Var(f; [c, d]) = Var(f_{|[c,d]}; [c, d])$*

Démonstration : Soit $\gamma : a = c_0 < \cdots < c_M = c$ une subdivision de $[a, c]$ et $\beta : c = b_0 < \cdots < b_N = b$ une subdivision de $[c, b]$ et $\alpha : a = a_0 < \cdots a_k = c_k < \cdots < a_M = c = b_0 < \cdots a_{M+l} = b_l < \cdots < a_{M+N} = b$. On a $Var(f_{|[a,c]};\gamma) + Var(f_{|[c,b]}, \delta) = Var(f;\alpha) \leq Var(f, [a, b])$ d'où : $Var(f_{|[a,c]}; [a, c]) + Var(f_{|[c,b]}, [c, b] \leq Var(f, [a, b])$. Si $\alpha' a = a_0 < \cdots < a_{N'} = b$ est telle que $Var(f; [a, b] \leq Var(f;\alpha') + \epsilon$ alors $\alpha = \alpha' \cup \{c\}$ raffine α' et est du type précédent pour une subdivision γ de $[a, c]$ et une subdivision δ de $[c, b]$ d'où :
$Var(f; [a, b]) \leq Var(f;\alpha') + \epsilon \leq Var(f;\alpha) + \epsilon = Var(f_{|[a,c]};\gamma) + Var(f_{|[c,b]}, \delta) + \epsilon \leq Var(f_{|[a,c]}; [a, c]) + Var(f_{|[c,b]}, [c, b]) + \epsilon$

$\square$

3.5.4 Corollaire et Définition. Une fonction 2π-périodique $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a ses restrictions $\tilde{f}_{[a,b]}$ à tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ fermé borné a variations bornées si et seulement si $\tilde{f}_{[0,2\pi]}$ est à variations bornées. On dit alors que la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ correspondante est *à variations bornées.*

3.5.5 Corollaire et Définition. La *fonction des variations* d'une fonction à variations bornées sur un intervalle $[a,b]$ est $V(f) : [a,b] \to \mathbb{R}, V(f)(t) = Var(f_{|[a,t]}; [a,t])$.

Cette fonction des variations $V(f)$ de f est croissante à valeurs positives ou nulles,
la fonction $f - V(f)$ est décroissante à valeurs négatives ou nulles et

$$f = f - Var(f) + Var(f) = Var(f) - (Var(f) - f)$$

toute fonction à variations bornées est différence de deux fonctions croissantes à valeurs positives ou nulles, en particulier a en tout point des limites à gauche e à droite.

3.5.6 co-Corollaire. *Soit $f \in E$ est à variations bornées alors pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a :* (Forme finale du théorème de Dirichlet)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} \overset{Déf}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} = \frac{1}{2}\Big[f(t_-) + f(t_+)\Big]$$