Analyse de Fourier 1

Approximation Converence en moyenne quadratique des séries de Fourier

Table des matières

1 Deux résultats d'approximation.

1.1 Le théorème de Weierstrass.

1.1.1 Théorème (de Weierstrass). *Une fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite uniforme de restrictions de polynômes à cet intervalle :*
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est continue alors pour tout* $\epsilon > 0$ *il y a* $Q = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ *tel que*

pour tout $x \in [a, b]$ *on a* $\quad |f(x) - Q(x)| = |f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k| \leq \epsilon$

1.1.2 Proposition. *Soit* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *continue telle que pour tout* $t \in [0, 1], |f(t)| \leq 1$.
Alors pour tout $\epsilon > 0$ *il y a* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que pour tout* $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *on a* $|f(t) - P(t)| \leq \epsilon$.

Démonstration : Si $n \in \mathbb{N}$ alors $1 \geq \displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx \geq \int_0^1 (1 - x)^n \, dx = \frac{1}{n+1} > 0$. On a donc $1 \leq \gamma_n = \left[\displaystyle\int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt\right]^{-1} \leq n + 1$.
Soit $K_n = \frac{\gamma_n}{2}(1 - X^2)^n \in \mathbb{R}[X]$ et, si $0 \leq \delta \leq 1, I_\delta = I_\delta(n) = \displaystyle\int_\delta^1 K_n(x) \, dx$, alors $\displaystyle\int_{-1}^1 K_n(x) \, dx = 2I_0 = 1$ et si $\delta > 0$:

$$0 \leq 2\, I_\delta(n) = 2 \int_\delta^1 K_n(x) \, dx \leq \gamma_n (1 - \delta)(1 - \delta^2)^n \leq (n + 1)(1 - \delta)^{n+1} \to 0 \quad \text{quand (à } \delta \in]0, 1] \text{ fixé) } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Comme f est uniformément continue sur $[0, 1]$, pour tout $\epsilon > 0$ il y a $0 < \delta < \frac{1}{3}$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$ avec $|x - y| \leq \delta$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, ainsi pour tout $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $u \in [-\delta, \delta]$ (donc $x + u \in [0, 1]$) on a $|f(x + u) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Soit $\displaystyle\int_0^1 f(x) K_n(t - x) \, dx = P_n(t)$ où $P_n = \dfrac{\gamma_n}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{2k} (-1)^{k+l} \binom{n}{k} \binom{2k}{l} \int_0^1 f(x) x^{2k-l} \, dt \, T^l \in \mathbb{R}[T]$ est un polynôme (de degré $2n$).
Si $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, posant $x = t + u$ on a $P_n(t) = \displaystyle\int_{-t}^{1-t} f(t + u) K_n(u) \, du = \int_{-t}^{-\delta} f(t + u) K_n(u) \, du + \int_{-\delta}^{\delta} f(t + u) K_n(u) \, du + \int_\delta^{1-t} f(t + u) K_n(u) \, du$.
De $\displaystyle\int_{-1}^1 K_n(u) \, du = 2I_0 = 1$ suit $f(t) = \displaystyle\int_{-1}^1 f(t) K_n(u) \, du = \int_{-1}^{-\delta} f(t) K_n(u) \, du + \int_{-\delta}^{\delta} f(t) K_n(u) \, du + \int_\delta^1 f(t) K_n(u) \, du = 2f(t) I_\delta + \int_{-\delta}^{\delta} f(t) K_n(u) \, du$ puisque $K_n(-u) = K_n(u)$. De même $\displaystyle\int_{-t}^{-\delta} f(t + u) K_n(u) \, du = \int_\delta^t f(t - u) K_n(-u) \, du = \int_\delta^t f(t - u) K_n(u) \, du$.
Donc $f(t) - P_n(t) = \displaystyle\int_\delta^t f(t - u) K_n(u) \, du + 2f(t) I_\delta + \int_{-\delta}^{\delta} \Big(f(t) - f(t + u) K_n(u)\Big) \, du + \int_\delta^{1-t} f(t + u) K_n(u) \, du$, et comme $|f(t)|, |f(t + u)|, |f(t + u)| \leq 1$ et $K_n(u) \geq 0$, on a $|f(t) - P_n(t)| \leq I_\delta + 2I_\delta + \frac{\epsilon}{2} + I_\delta = \frac{\epsilon}{2} + 4I_\delta(n) \leq \epsilon$ si n est assez grand. $\square$

1.1.3 Exercice. Déterminer un $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_\delta(n) \leq \frac{\epsilon}{2}$ [on pourra écrire .$(n + 1)(1 - \delta)^{n+1} = (n + 1)\sqrt{(1 - \delta)}^{n+1} \cdot \sqrt{(1 - \delta)}^{n+1} \leq 4e^{-1} \operatorname{Log}(\frac{1}{1-\delta}) e^{(n+1) \operatorname{Log}(1-\delta)}$]

1.1.4 Exercice. Déduire le Théorème **1.1.1** de la Proposition **1.1.2**.

1.2 Le cercle, polynômes trigonométriques et coefficients de Fourier.

1.2.1 Rappel.

1. Deux réels $x, y \in \mathbb{R}$ sont *congrus modulo* 2π, noté $x \equiv y \bmod 2\pi$ si il y a un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x - y = k \cdot 2\pi$, c'est une relation d'équivalence compatible avec l'addition $+$ des réels [Si $x \equiv x' \bmod 2\pi$ et $y \equiv y' \bmod 2\pi$ alors $x + y \equiv x' + y' \bmod 2\pi$]
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π*-périodique* si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x + 2\pi) = f(x)$.

1.2.2 Exemples. Si $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $\mathfrak{c}_n, \mathfrak{s}_n, e_n = \mathfrak{c}_n + i\mathfrak{s}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathfrak{c}_n(t) = \cos(nt), \mathfrak{s}_n(t) = \sin(nt), e_n(t) = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$ sont 2π-périodiques.

1.2.3 Définition. Le cercle est le groupe quotient $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (du groupe additif des réels par le sous-groupe des multiples entiers de 2π). On note $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ l'application quotient. D'où les équivalences :

1. la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π*-périodique* ssi il y a une fonction $\overline{g} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $g = \overline{g} \circ \rho$.
2. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ssi il y a une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π*-périodique* telle que $\tilde{f} = f \circ \rho$.

1.2.4 Remarque. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}, b - a = 2\pi$ est un intervalle réel de longueur 2π alors $[a, b[$ et $]a, b]$ sont des systèmes de représentants de la congruence modulo 2π, donc on peut définir une fonction sur le cercle $\mathbb{T}$ de manière unique par ses valeurs sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$).

1.2.5 Définitions. Soit $N \in \mathbb{N}$ et, pour $-N \leq j \leq N$ et $0 \leq k \leq N, 0 < l \leq N, c_j, a_k, b_l \in \mathbb{C}$.
On pose $c = (c_j)_{-N \leq j \leq N}, a = (a_k)_{0 \leq k \leq N}, b = (b_l)_{0 < l \leq N}$. Le *polynôme trigonométrique (de degré N) et*

1. *coefficients c* est :
$$P_c = \sum_{j=-N}^{N} c_j e_j : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$$
2. *coefficients de partie paire a et de partie impaire b* est :
$$Q_{a,b} = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathfrak{c}_\mathfrak{k} + b_k \cdot \mathfrak{s}_\mathfrak{k} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$$

1.2.6 Exercices. Soit $N \in \mathbb{N}$ et, pour $-N \leq j \leq N$ et $0 \leq k \leq N, 0 < l \leq N, c_j, a_k, b_l \in \mathbb{C}$. Vérifier que :

1. Pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a $\frac{1}{2}\big[Q_{a,b}(t) + Q_{a,b}(-t)\big] = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \mathfrak{c}_k$ et $\frac{1}{2}\big[Q_{a,b}(t) - Q_{a,b}(-t)\big] = \sum_{l=1}^{N} b_l \cdot \mathfrak{s}_l$
[ce qui justifie le vocabulaire ci-dessus *coefficients de partie paire et impaire*]
2. $P_c = Q_{a,b}$ a lieu si et seulement si on a l'une des conditions équivalentes :
   (a) $a_0 = c_0$ et, pour $1 \leq k \leq N$, on a $a_k = c_{-k} + c_k$ et $b_k = i(c_k - c_{-k})$
   (b) $c_0 = a_0$ et, pour $1 \leq k \leq N$, on a $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ et $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$

1.2.7 Définition. Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définie sur le cercle est :

1. *continue sur* $\mathbb{T}$ si la fonction 2π-périodique correspondante $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue.
2. *intégrable au sens de Riemann* si la fonction 2π-périodique correspondante $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann sur les intervalles fermés bornés.
   En particulier une fonction continue sur $\mathbb{T}$ est intégrable au sens de Riemann.

1.2.8 Exercice. Soit $[a,b], b-a=2\pi$ un intervalle réel de longueur 2π. Prouver que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue vérifiant $g(a)=g(b)$ il y a une unique fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continue définie sur le cercle dont la fonction 2π-périodique correspondante $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a g pour restriction $\tilde{f}_| = g : [a,b] \to \mathbb{C}$ à $[a,b]$.

1.2.9 Lemme. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ et $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique correspondante. Alors sont équivalents :*

1. *La fonction f est intégrable au sens de Riemann.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la restriction $\tilde{f}_| : [x, x+2\pi] \to \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann.*
3. *Il y a $x \in \mathbb{R}$ tel que la restriction $\tilde{f}_| : [x, x+2\pi] \to \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann.*

En ce cas pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a, b = a+2\pi \in \mathbb{R}$ on a $\int_x^{x+2\pi} \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f}$. En particulier ;

$$\int_x^{x+2\pi} \tilde{f} = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \tilde{f} = \int_0^{2\pi} \tilde{f} = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}$$

Démonstration : Il suffit de montrer que **3** implique **1**.
Supposons donc $\tilde{f}$ Riemann intégrable sur $[x, x+2\pi]$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in [x+k2\pi, x+(k+1)2\pi], t-k2\pi \in [x, x+2\pi]$ et $\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t-k2\pi)$ donc $\tilde{f}_| : [x+k2\pi, x+(k+1)2\pi] \to \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann. De plus si $k \leq l \in \mathbb{Z}$, comme $[x+k2\pi, x+(l+1)2\pi] = \cup_{j=k}^{l}[x+j2\pi, x+(j+1)2\pi]$ (et $[x+(j-1)2\pi, x+j2\pi] \cap [x+j2\pi, x+(j+1)2\pi] = \{j\}$ alors $\tilde{f}_| : [x+k2\pi, x+(l+1)2\pi] \to \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann et $\int_{x+k2\pi}^{x+(l+1)2\pi} \tilde{f} = (1+k-l)\int_x^{x+2\pi} \tilde{f}$.
Soit $[a,b]$ un intervalle ferné borné de longueur $b-a=2\pi$ et $k = [\frac{a-x}{2\pi}] \in \mathbb{Z}$. Comme $x+k2\pi \leq a \leq b < x+(k+2)2\pi$ et $\tilde{f}_|$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b] \subset [x+k2\pi, x+(k+2)2\pi]$ d'où **1** et

$$\int_{x+k2\pi}^{(k+1)2\pi} \tilde{f} = \int_{x+k2\pi}^{a} \tilde{f} + \int_a^{x+(k+1)2\pi} \tilde{f}, \qquad \int_a^b \tilde{f} = \int_a^{x+(k+1)2\pi} \tilde{f} + \int_{x+(k+1)2\pi}^{b} \tilde{f}$$

et $t \in [x+k2\pi, a]$ si et seulement si $t+2\pi \in [x+(k+1)2\pi, b=a+2\pi]$ et $\int_{x+k2\pi}^{a} \tilde{f} = \int_{x+(k+1)2\pi}^{b} \tilde{f}$ on a $\int_a^b \tilde{f} = \int_{x+k2\pi}^{x+(k+1)2\pi} \tilde{f} = \int_x^{x+2\pi} \tilde{f}$ □

1.2.10 Notation. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann sur le cercle $\mathbb{T}$ et $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la fonction 2π-périodique correspondante, on pose : $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f = \int f = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}$

1.2.11 Notations.
1. $E = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \,|\, f$ intégrables au sens de Riemann$\}$, l'espace vectoriel complexe des fonctions intégrables au sens de Riemann sur le cercle, il contient le sous-espace $C = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ continue}\} \subset E$ des fonctions continues sur le cercle.
2. Le produit scalaire $< \,,\, >: E \times E \to \mathbb{C}, < f, g >= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} f \cdot \overline{g}$

1.2.12 Exercices.
1. $< \,,\, >$ est *sesquilinéaire hermitien non négatif, c. a d.* si pour $i = 1, 2$ on a $f, f_i, g, g_i \in E$ et $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ alors :

$$< \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2, g >= \lambda_1 \cdot < f_1, g > + \lambda_2 \cdot < f_2, g >, \quad < f, \mu_1 \cdot g_1 + \mu_2 \cdot g_2 >=< f, g_1 > \cdot \overline{\mu_1} + < f, g_2 > \cdot \overline{\mu_2}, \quad < g, f >= \overline{< f, g >} (\text{donc } < f, f > \in \mathbb{R}) \text{ et } < f, f > \geq 0$$

2. La restriction à $C \times C$ est un produit scalaire *défini positif* [*c. a d.* pour tout $f \in C$ on a $< f, f > \geq 0$ avec égalité si et seulement si $f = 0$]

1.2.13 Lemme. $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ *est une* famille orthonormale dans *E :* (relations d'orthogonalité des fonctions e_n)

$$< e_n, e_n >= 1 \quad \textit{et si } m \neq n, \quad < e_m, e_n >= 0$$

Démonstration : $< e_m, e_n >= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{imt} \overline{e^{int}} \, dt = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} \, dt = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n) \cdot t} \, dt$ qui, si $m = n$ vaut 1 et sinon $\left[\frac{e_{(m-n)}}{2\pi i(m-n)} \right]_0^{2\pi} = 0.$ □

1.2.14 Exercice. (relations d'orthogonalité des fonctions $\mathfrak{c}_m$ et $\mathfrak{s}_n$)
1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathfrak{c}_m$ et $\mathfrak{s}_m$ en fonction de e_m et e_{-m} En déduire :
2. si $m, n \in \mathbb{N}$ les valeurs des produits $< \mathfrak{c}_m, \mathfrak{s}_n >, < \mathfrak{c}_m, \mathfrak{c}_n >$ et $< \mathfrak{s}_m, \mathfrak{s}_n >$ [on distinguera les cas $m \neq n, 0 = m = n$ et $0 \neq m = n$]
3. Reprendre la question **2** par un calcul direct d'intégrale.

1.2.15 Définitions. Si $n \in \mathbb{Z}$ le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de $f \in E$ est

$$\hat{f}(n) = c_n(f) =< f, e_n >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot e_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt$$

Si $m \in \mathbb{N}$ les $n^{\text{ièmes}}$ coefficient de Fourier réels de $f \in E$ sont $a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f$, $b_0(f) = 0$ et, si $m \neq 0$

$$a_n(f) = 2 < f, \mathfrak{c}_n >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \mathfrak{c}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt$$

$$b_n(f) = 2 < f, \mathfrak{s}_n >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \mathfrak{s}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt$$

1.2.16 Remarque. Si $f \in E$ et $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}$ alors $a_0(f), a_m(f), b_m(f) \in \mathbb{R}$, justifiant la terminologie de coefficients réels. mais $\hat{f}(n) \in \mathbb{C}$ n'a aucune raison d'être réel.

1.2.17 Exemple. Si $f = \sin : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Comme $f = \mathfrak{s}_1 = \frac{e_1 - e_{-1}}{2i}$ on a, par le lemme **1.2.13** $\hat{f}(-1) = \frac{-1}{2i} = \frac{-1}{2i} \notin \mathbb{R}$

1.2.18 Exercice. Soit des polynômes trigonométriques $P_c = \sum_{j=-N}^{N} c_j e_j, \quad Q_{a,b} = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathfrak{c}_\mathfrak{k} + \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot \mathfrak{s}_\mathfrak{k}$.
Prouver que pour $-N \leq j \leq N$ on a $\hat{P}_c(n) = c_n$, et pour $1 \leq k \leq N$ on a $a_k = a_k(Q_{a,b}), b_k = b_k(Q_{a,b})$ et $a_0 = a_0(Q_{a,b})$.

1.2.19 Corollaire. *Soit $f \in E$ alors la suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable et :* (inégalité de Bessel)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq < f, f > = \frac{1}{2\pi} \int |f|^2$$

Démonstration :

1. Pour tout $M, N \in \mathbb{N}$ la fonction $r_{M,N} = f - \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(k) \cdot e_k$ est dans l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_k\,;\, -M \leq k \leq N)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_k pour $-M \leq k \leq N$: $< f - \sum_{l=-M}^{N} \hat{f}(l) \cdot e_l, e_k > = < f, e_k > - \sum_{l=-M}^{N} \hat{f}(l) < e_l, e_k > \hat{f}(k) - \hat{f}(k) = 0$
2. Comme $f = f - \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(k) \cdot e_k + \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(k) \cdot e_k$ et $f_{M,N} = \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(k) \cdot e_k \in \mathrm{Vect}(e_k\,;\, -M \leq k \leq N)$ on a :

$$< f, f > = < r_{M,N} + f_{M,N}, r_{M,N} + f_{M,N} > = < r_{M,N}, r_{M,N} > + < f_{M,N}, f_{M,N} > \geq < f_{M,N}, f_{M,N} > = \sum_{k=-M}^{N} |\hat{f}(k)|^2$$

et $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq < f, f >$

□

1.2.20 Remarque. La majoration de ce corollaire est en fait une égalité car (Cf. sous-section suivante) les fonctions continues 2π-périodiques sont limites uniformes de polynômes trigonométriques.

1.2.21 Exercice.
1. Calculer les coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$ et les coefficients de Fourier réels $a_n(f), b_n(f)$ de la fonction $f \in E$ définie (selon la Remarque **1.2.4**) par $f(\pi) = 0$ et si $|t| < \pi, f(t) = t$.
2. Vérifier sur les formules obtenues que l'on a : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$. La famille $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est-elle sommable ?
3. Reprendre les deux questions précédentes avec la fonction $g \in E$ définie (selon la Remarque **1.2.4**) par, si $|t| \leq \pi, g(t) = |t|$.

1.3 Densité des polynômes trigonométriques.

1.3.1 THÉORÈME (de Weierstrass trigonométrique). *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continue et* 2π*-périodique. Alors* f *est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

Démonstration : Comme f est 2π-périodique, on peut suposer $t \in [-2\pi, \pi]$. Etant continue f bornée et uniformément continue sur $[-2\pi, 2\pi]$: il y a M et pour tout $\epsilon > 0$ il y a $0 < \delta < \pi$ tel que pour tout $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$ avec $|x-y| \leq \delta$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $|f(x)| \leq M$.
Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\pi \geq \int_0^\pi \Big(\dfrac{1+\cos(t)}{2}\Big)^n dt \geq \int_0^\pi \Big(\dfrac{1+\cos(t)}{2}\Big)^n \sin(t)\, dt = \Big[-\dfrac{2}{n+1}(\dfrac{1+\cos(t)}{2}\Big)^{n+1}\Big]_0^\pi = \dfrac{2}{n+1}$. On a donc :
$\dfrac{1}{\pi} \leq \delta_n = \Big[\int_0^\pi \Big(\dfrac{1+\cos(t)}{2}\Big)^n dt\Big]^{-1} \leq \dfrac{n+1}{2}$. Soit $\overline{T}_n \in C, \widetilde{\overline{T}}_{nn}(t) = T_n(t) = \dfrac{\delta_n}{2}\Big(\dfrac{1+\cos(t)}{2}\Big)^n = \dfrac{\delta_n}{2}\cos(\dfrac{t}{2})^{2n}$ et si $0 \leq \delta \leq \pi,\ J_\delta = J_\delta(n) = \int_\delta^\pi T_n$, alors : $\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\, dx = 2J_0 = 1$ et si $\delta > 0$: $0 \leq 2\, J_\delta(n) = 2\int_\delta^\pi T_n(x)\, dx \leq \delta_n(\pi - \delta)\cos(\dfrac{\delta}{2})^n \leq (n+1)\dfrac{\pi}{2}\cos(\dfrac{\delta}{2})^n \to 0$ quand (à $\delta \in]0, \pi]$ fixé) n tend vers l'infini.
Soit $P_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(t-x)\, dx = \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(x) T_n(t-x)\, dx$ par périodicité de $x \mapsto f(x)T_n(t-x)$. D'après l'exercice **1.3.3** ci-dessous c'est un polynôme trigonométrique car $P_n(t) = \dfrac{\delta_n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l \binom{n}{k}\binom{2k}{l} \int_\pi^\pi f(x)\cos(x)^{2k-l}\sin(x)^l\, dt\ \cos(t)^{2k-l}\sin(t)^l$, donc si $t \in [-\pi, \pi]$, posant $x = t + u$:

$$P_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) T_n(-u)\, du = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) T_n(u)\, du \int_{-\pi}^{-\delta} f(t+u) T_n(u)\, du + \int_{-\delta}^{\delta} f(t+u) T_n(u)\, du + \int_\delta^\pi f(t+u) K_n(u)\, du$$

De $\int_{-\pi}^{\pi} T_n(u)\, du = 1$ et $T_n(-u) = T_n(u)$ suit $f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T_n(u)\, du = \int_{-\pi}^{-\delta} f(t) T_n(u)\, du + \int_{-\delta}^{\delta} f(t) T_n(u)\, du + \int_\delta^\pi f(t) T_n(u)\, du = 2f(t)J_\delta + \int_{-\delta}^{\delta} f(t) T_n(u)\, du$.
De même $\int_{-\pi}^{-\delta} f(t+u) T_n(u)\, du = \int_\delta^\pi f(t-u) T_n(-u)\, du = \int_\delta^\pi f(t-u) T_n(u)\, du$, donc :

$$f(t) - P_n(t) = \int_\delta^\pi f(t-u) T_n(u)\, du + 2f(t)J_\delta + \int_{-\delta}^{\delta} \big(f(t) - f(t+u)\big) T_n(u)\, du + \int_\delta^\pi f(t+u) T_n(u)\, du$$

et comme $T_n(u) \geq 0$ et $u \in [-\delta, \delta], t \in [-\pi, \pi]$, donc $t \pm u \in [-2\pi, 2\pi]$ et $f|(t \pm u)| \leq M$ et $|f(t) - f(t+u)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, il vient :
$|f(t) - P_n(t)| \leq MJ_\delta(n) + 2MJ_\delta(n) + \frac{\epsilon}{2} + MJ_\delta(n) = 4MJ_\delta(n) \leq \epsilon$ si n est assez grand. □

1.3.2 Remarque. On change le domaine d'intégration de l'intégrale défininssant P_n de $-\pi$ à π en de $t - \pi$ à $t + \pi$ pour que, après changement de variable $x = t + u$ on intégre de $-\pi$ à π et les morceaux de l'intégrale hors la partie entre $-\delta$ et δ ayant des allures symétriques, se majorent de la même manière.

1.3.3 Exercice. Soit $p, q, m, n \in \mathbb{N}$, vérifier $(e_m)^p \cdot (e_n)^q = e_{mp-nq}$ et $\mathfrak{c}_n^p \cdot \mathfrak{s}_n^q = \dfrac{1}{2^{p+q} i^q}(e_n + e_{-n})^p (e_n - e_{-n})^q = \dfrac{(-i)^q}{2^{p+q}} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \binom{i}{p} (-1)^j \binom{j}{q} e_{p+q+2(i+j)}$.

1.4 Convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier.

1.4.1 Rappels. Soit $h, k : [a, b] \to \mathbb{C}$ intégrables au sens de Riemann, elles sont bornées et :

1. Le produit $h \cdot k$ est intégrable au sens de Riemann et (inégalité ce Cauchy Schwarz)

$$\left|\int_a^b h \cdot k\right|^2 \leq \left[\int_a^b |h \cdot k|\right]^2 \leq \left[\int_a^b |h|^2\right] \cdot \left[\int_a^b |k|^2\right]$$

2. Pour tout $\epsilon > 0$ il y a une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $f(a) = f(b) = 0, \| f \| \leq \| h \|$ et $\displaystyle\int_a^b |h - f| \leq \epsilon$ (donc $\displaystyle\int_a^b |h - f|^2 \leq \| h \| \int_a^b |h - f| \leq 2 \| h \| \epsilon$)

donc en prenant $[a, b] = [a, a + 2\pi]$, on peut dans l'énoncé précédent remplacer h, k, f par $h, k \in E$ (intégrables sur le cercle $\mathbb{T}$) et $f \in C$ (continue sur le cercle $\mathbb{T}$)

1.4.2 Définition. La *norme quadratique* de h est $\displaystyle \| h \|_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\mathbb{T}} |h|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{< h, h >}$.

1.4.3 Remarque. C'est une *semi-norme* sur E et une *norme* sur C :

$$\| h + k \|_2 \leq \| h \|_2 + \| k \|_2 \quad \text{et, si } \lambda \in \mathbb{C}, \| \lambda h \|_2 = |\lambda| \, \| h \|_2$$

Si h est continue, alors $\| h \|_2 = 0$ si et seulemet si $h = 0$

Démonstration : $\displaystyle \| h + k \|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |h + k|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |h|^2 + 2|h||k| + |k|^2 = \| h \|_2^2 + 2\int_{\mathbb{T}} |h||k| + \| k \|_2^2 \leq \| h \|_2^2 + 2 \| k \|_2 \| k \|_2 + \| k \|_2^2 = \left(\| h \|_2 + \| k \|_2\right)^2$

Si h et continue et $h(t_0) \neq 0$ il y a $0 < \delta < \pi$ tel que pour $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$ on ait $|f(t)| \geq \frac{|f(t_0)|}{\sqrt{2}}$ donc $\displaystyle \| h \|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |h|^2 \geq \delta |f(t_0)|^2 > 0$ □

1.4.4 Définition. Une suite de fonctions $f_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *converge en moyenne quadratique* quadratique vers $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ si $\| f - f_n \|_2$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On dit alors que f est *limite en moyenne quadratique* des f_n

1.4.5 Corollaire. *Si $f_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ converge uniformément vers $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ alors f_n converge en moyenne quadratique vers f*

Démonstration : Ce la suit de $\displaystyle \| f - f_n \|_1 = \int_{\mathbb{T}} |f - f_n| \leq 2\pi \| f - f_n \|$ et $\displaystyle \| f - f_n \|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |f - f_n| \cdot |f - f_n| \leq \left[\int_{\mathbb{T}} |f - f_n|^2\right]\left[\int_{\mathbb{T}} |f - f_n|^2\right]$ □

1.4.6 Remarque. La réciproque n'est pas vraie car d'après **1.4.1 2** toute fonction intégrable est limite en moyenne quadratiques de fonctions continues, mais seule une fonction continue peu être limite d'une suite de fonctions continues.

1.4.7 Définitions. Soit $f \in E$ sa *série de Fourier* est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$.

Si $N \in \mathbb{N}$, la valeur en t_0 de la $N^{ième}$ *somme partielle* de la série de Fourier de f est

$$S_N(f)(t_0) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n(t_0) \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int_0} = a_0(f) + \sum_{1}^{N} a_n \cos(nt_0) + b_n \sin(t_0)$$

La série de Fourier de f *converge en un point* t_0 [resp. *converge uniformément*] si la suite S_N de ses sommes partielles converge en t_0 [resp. uniformément] quand N tends vers l'infini.

1.4.8 Remarque. Nous verrons que si f est somme de fonctions monotones par morceaux alors en tout point $t_0 \in \mathbb{T}$ la série de Fourier de f conververge vers la moyenne $\dfrac{f_-(t_0) + f_+(t_0)}{2}$ de ses limites à gauche et à droite en t_0. Mais la convergence peut ne pas :

1. être absolue (Cf.exercice **1.2.21**) (et donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n(t_0)$ ne converge pas en vrac)
2. même pour une fonction continue sur $\mathbb{T}$ avoir lieu tout en point de $\mathbb{T}$.

Cependant on a le

1.4.9 Théorème. *Pour tout $h \in E$ alors h est limite en moyenne quadratique de sa série de Fourier.*

Plus précisément pour tout $\epsilon > 0$ il y a $N > 0$ tel que si $-p, q \geq N$ on a $\| h - \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n \|_2 \leq \epsilon$

Démonstration : Le rappel **1.4.1 2** et le théorème **1.3.1** donnent f continue et un polynôme trigonométrique P tels que $\| h-f \|_2 \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $\| f-P \| \leq \epsilon\sqrt{\frac{1}{8\pi}}$ d'où $\| f-P \|_2 \leq \frac{\epsilon}{2}$. Si N est le degré de P et $-p, q \geq N$ alors $f - \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n$ étant dans l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_k\,;\, -N \leq k \leq N) \ni \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n - P$ on a $\| f - \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n \|_2 \leq \| f - \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n + \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n - P \|_2 = \| f-P \|_2 \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ d'où $\| h - \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n \|_2 \leq \| h-f \|_2 + \| f - \sum_{n=p}^{q} \hat{h}(n)e_n \|_2 \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$ □

1.4.10 Corollaire. *Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est continue et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\hat{f}(n) = 0$ alors $f = 0$*

Démonstration : Si $h = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}, \hat{h}(n) =< h, e_n >= 0$.
Si pour tout $n \in \mathbb{Z}, \hat{h}(n)$ alors pour tout $\epsilon > 0$ soit N tel que $\epsilon \geq \| h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n \|_2 = \| h \|_2$ donc $\| h \|_2 = 0$ et, par **1.4.3**, $h = 0$. □

1.4.11 co-Corollaire. *Si $f \in E$ est continue et $S_N(f)$ converge uniformément vers g, alors $f = g$*

Démonstration : $h = f - g$ est continue et ses coefficients de Fourier sont $\hat{h}(n) = \hat{f}(n) - \hat{g}(n) = \hat{f}(n) - \hat{f}(n) = 0$ dond $h = 0$. □

1.4.12 Corollaire. *Si $h, k : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ sont intégrbles au sens de Riemann alors* (Formule de Parseval)

$$< h, k >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n) \cdot \overline{\hat{k}(n)}$$

(Formule de Bessel)

$$\| h \|_2^2 =< h, h >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(n)|^2$$

Démonstration : La formule de Bessel étant le cas particulier $k = h$ de la formule de Parseval il suffit de montrer cette dernière.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, comme les $e_n,\ n \in \mathbb{N}$ forment une famille orthonormale, on a $< \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n, \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n >= \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)\overline{k}(n)$ et d'après l'inégalité de Bessel **1.2.19** on a $\sum_{n=-N}^{N} |\hat{h}(n)|^2 \leq < h, h >= \| h \|_2^2,\ \sum_{n=-N}^{N} |\hat{k}(n)|^2 \leq < k, k >= \| k \|_2^2$.

D'après **1.4.9**, pour tout $\epsilon > 0$ il y a N tel que $\| h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n \|_2^2, \| k - \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n \|_2^2 \leq \epsilon$ donc :

$$< h, k > - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)\overline{k}(n) =< h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n + \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n, k - \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n + \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n > - < \hat{h}(n)e_n, \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n >=$$

$$=< h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n, k - \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n > + < h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n, \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n > + < \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n, k - \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n >.$$

Donc $| < h, k > - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)\overline{k}(n)| \leq$

$$\| h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n \|_2 \cdot \| k - \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n \|_2 + \| h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n \|_2 \cdot \| \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n \|_2 + \| \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n)e_n \|_2 \| k - \sum_{n=-N}^{N} \hat{k}(n)e_n \|_2 \leq \epsilon \cdot [\| h \|_2 + \| k \|_2 \epsilon] \quad \square$$

1.4.13 Exemple (Calcul par l'égalité de Bessel de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). Soit $f \in E$ telle que $f(\pi) = 0$ et pour $|t| \leq \pi, f(t) = t$. Alors :

$\| f \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = [\frac{t^3}{2\pi}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$ et on a $\hat{f}(0) = 0$ car f est impaire et si $n \neq 0$ on a $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot e{-}int\, dt = \left[\frac{t \cdot e{-}int}{-2i\pi n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{2\pi n}\, dt = (-1)^n \frac{i}{n}$ d'où :

$$\frac{\pi^2}{3} =\| f \|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$