1 Primitives des fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé borné.

1.1 Subdivisions d'un intervalle $I = [a, b]$

1.1.1 Définitions. Une *subdivision* de I est une partie finie $\alpha \subset]a, b[$ de l'intervalle ouvert correspondant. Identifiée à la suite des éléments de $\alpha \cup \{a, b\}$ rangés par ordre croissant $\alpha : a = a_0 < \ldots < a_N = n$, numérotée de 0 à $N = N(\alpha) = 1 + \mathrm{card}(\alpha))$, l'*ordre* de α, elle découpe I en N intervalles consécutifs :

$$I_k = [a_{k-1}, a_k], k = 1, \ldots, N \text{ le } k^{\text{ième}} \textit{ pas} \text{ de } \alpha \text{ de } \textit{longueur } e_k = a_k - a_k$$

.

1.1.2 Exemple. Pour $0 \leq k \leq N, a_k = a + k\frac{b-a}{N} = \frac{N-k}{N} \cdot a + \frac{k}{N} \cdot b, e_k = \frac{b-a}{N}$, la *subdivision régulière d'ordre N*.

1.1.3 Exercice. Prouver que la subdivision régulière d'ordre N est l'unique subdivision d'ordre N de $[a, b]$

$$a = a_0 < \cdots < a_{k-1} < a_k < \cdots < a_N = b$$

ayant tous ses pas égaux [*c. a d.* si $1 \leq k, l \leq N, e_k = a_k - a_{k-1} = a_l - a_{l-1} = e_l$]

1.1.4 LEMME. (1) *pour* $1 \leq k \leq N$ *on a* $e_k > 0$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} e_k = b - a$

1.1.5 Définitions. Soit α, β deux subdivisions de I. On dit que α *raffine* (ou *est un raffinement de*) β, noté $\alpha < \beta$ si $\beta \subset \alpha$, et que α est un *raffinement élémentaire de* β, noté $\alpha <_e \beta$ si $\alpha < \beta$ et $N(\alpha) = N(\beta) + 1$

1.1.6 Exercices. Prouver que :

1. la relation de raffinement est reflexive, antisymétrique et transitive.
2. (a) Si $M, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors la subdivieon régulière d'ordre N raffine celle d'ordre M ssi M divise N.
   (b) Pour $0 \leq \nu \leq 4$ représenter sur une figure les subdivisions régulières d'ordre 2^ν de $[a, b] = [0, 16]$

1.1.7 PROPOSITION. *Si* $\alpha < \beta$ *alors il y a* $l \in \mathbb{N}$ *t.q.* $N(\alpha) = N(\beta) + l \geq N(\beta)$ *avec égalité ssi* $\alpha = \beta$ *et :*

1. *Si* $l = 1$: $\alpha <_e \beta$ *alors il y a* $1 \leq k \leq N$ *tel que* $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_{N+1} = b, \beta : a = b_0 < \cdots < b_N = b$ *où* $a_k \in]b_{k-1}, b_k[$ *et si* $0 \leq j < k, a_j = b_j$, *si* $k < h \leq N + 1, a_h = b_{h-1}$.
2. *Pour* $0 \leq t \leq l$ *il y a des subdivisions* α^t *telles que* $\alpha^0 = \beta, \alpha^l = \alpha$ *et pour* $0 < t \leq l$ *on a* $\alpha^t <_e \alpha^{t-1}$.

1.2 Intégrale supérieure d'une fonction bornée sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé borné.

Soit $m, M, x < y \in \mathbb{R}$ et $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $t \in [x, y]$ $m \leq f(t) \leq M$.
Soit $x \leq a < b \leq y$ et $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$ une subdivision de $[a, b] \subset [x, y]$.

1.2.1 Notations. Pour $1 \leq k \leq N$ on pose ;

$$m \leq \lambda = \inf\{f(t) \,|\, a \leq t \leq b\} \leq l_k = \sup\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a_k\} \leq l = \sup\{f(t) \,|\, a \leq t \leq b\}$$

1.2.2 Exemple. Si f est continue croissante $l_k = f(a_k)$.

1.2.3 Remarque. Si $a_{k-1} < a' < a_k$ alors $l'_k = \sup\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a'\}, l''_k = \sup\{f(t) \,|\, a' < t < a_k\} \leq l_k$

1.2.4 Définition. La *somme de Darboux supérieure de f associée à* α est :

$$L_\alpha(a, b) \ (= L_\alpha(a, b : f)) \ = \sum_{k=1}^{N} l_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^{N} \sup\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a_k\} \cdot (a_k - a_{k-1})$$

En particulier si f est continue croissante $L_\alpha(a, b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \cdot e_k$

1.2.5 Exemples. a) Si $f = c$ est constante $L_\alpha(a, b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} c \cdot e_k = c \cdot (b - a)$.

b) Si $f = i : [x, y] \underset{t \mapsto t}{\to} \mathbb{R}$ et $e = \max\{e_1, \ldots, e_N\}$ alors $\frac{1}{2}(b^2 - a^2) \leq L_\alpha(a, b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e_k \leq \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{e}{2}(b - a)$

1.2.6 PROPOSITION. $(1)\lambda \cdot (b-a) \leq L_\alpha(a,b) \leq l \cdot (b-a)$ (2) *si* $\alpha' < \alpha$ *alors* $L_{\alpha'}(a,b) \leq L_\alpha(a,b)$

1.2.7 Notations. $A(a,b)$ (resp. $A_N(a,b)$) désigne l'ensemble des subdivisions (resp. d'ordre N) de $[a,b]$

1.2.8 Définition. L'*intégrale supérieure de* f *sur* $[a,b]$ est $L(a,b)$ $(= L(a,b;f)) = \inf_{\alpha \in A(a,b)} L_\alpha(a,b)$

1.2.9 THÉORÈME. (1) $\lambda \cdot (b-a) \leq L(a,b) \leq l \cdot (b-a)$ (2) *si* $x \leq a < b < c \leq y$ $L(a,c) = L(a,b) + L(b,c)$

1.2.10 COROLLAIRE. *Soit* $F, G : [x,y] \to \mathbb{R}, F(x) = 0,$ *si* $x < t, F(t) = L(x,t);$ $G(y) = 0,$ *si* $t < y, G(t) = -L(t,y)$. *Si* f *est continue en* $t_0 \in [x,y]$ *alors* F *et* G *sont dérivables en* t_0 *et* $F'(t_0) = f(t_0) = G'(t_0)$.

1.2.11 Rappel (dans le futur, voir Mat121). Si $f :]u,v[\to \mathbb{R}$ est continue alors pour tout $x < y \in]u,v[$, $f_{|[x,y]}$ est bornée.

1.2.12 COROLLAIRE.
1. *Si* f *est continue sur* $[a,b]$ *alors* F *et* G *sont des primitives de* f.
2. *si* $f :]u,v[\to \mathbb{R}$ *est continue et* $s_0 \in]u,v[$ *alors* f *a une primitive s'annulant en* s_0 :

$$F :]u,v[\to \mathbb{R},\ t < s_0\ F(t) = -L(t,s_0);\ F(s_0) = 0;\ t > s_0\ F(t) = L(s_0,t)$$

1.2.13 Application. $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{t}$ d'où, avec $s_0 = 1, F = \text{Log} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

1.2.14 Exercice. Soit $1 < x \in \mathbf{R}$ et $h : [1,x] \to \mathbf{R}, h(t) = \frac{1}{t}$.

1. Prouver, en notant pour $1 \leq u < w \leq x$ et $v \in]u,w[$ $\alpha(v)$, la subdivision $\alpha(v) : u = u_0 < u_1 = v < u_2 = w$ de $[u,w]$:
$$L_{\alpha(v)}(u,w;h) = \frac{1}{u}(v-u) + \frac{1}{v}(w-v) = \frac{v}{u} + \frac{w}{v} - 2 \geq \frac{\sqrt{uw}}{u} + \frac{w}{\sqrt{uw}} - 2 = L_{\alpha(\sqrt{uw})}(u,w,h)$$
2. Admettant que parmi les subdivisions α d'ordre N de $[a,b]$ il y en a une qui minimise la somme de Darboux supérieure $L_\alpha(a,b;h)$. en déduire que c'est la subdivision géométriquement régulière $\gamma_N : 1 = x^{\frac{0}{N}} < \cdots < x^{\frac{k}{N}} < \cdots < x^{\frac{N}{N}} = x$, qu'elle est de k ième pas $e_k = (x^{\frac{1}{N}} - 1)\, x^{\frac{k-1}{N}}$ et, pour toute subdivision α d'ordre N :
$$L_\alpha(1,x;h) \geq L_{\gamma_N}(1,x;h) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x^{\frac{k-1}{N}}}(x^{\frac{1}{N}} - 1)x^{\frac{k-1}{N}} = N(x^{\frac{1}{N}} - 1)$$
3. Déduire de ce qui précède $\text{Log}(x) = L(1,x;h) = \text{Lim}_{N \to +\infty} N(x^{\frac{1}{N}} - 1)$

2 Relations d'ordre sur un ensemble E.

2.1 Définition et exemples.

2.1.1 Définition. Une *relation d'ordre* ((ou un *ordre*), notée $\prec$ (ou $\prec_{\mathcal{R}}$ si il y a plusieurs ordres dans le contexte), sur E est une relation sur E, réflexive, anti-symétrique et transitive. On dit $(E, \prec_{\mathcal{R}})$ est un *ensemble ordonné.*

2.1.2 Exemples. $=$ sur E ; $\subset$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$; $\leq$ sur $\mathcal{N}$; $\leq$ sur $\mathbb{R}$; $|$ sur $\mathcal{N}$, le raffinement $<$ sur $A(a,b)$, les subdivisions de $[a,b]$ sont des ordres mais, $<$ sur $\mathcal{N}$ (ou sur $\mathbb{R}$) n'étant pas réflexive n'est pas une relation d'ordre.

2.1.3 Exercice. Si $\prec$ est un ordre sur E alors $\succ$ défini par $x \succ y$ ssi $y \prec x$ est un ordre sur E, dite *opposé de* $\prec$.

2.1.4 Définition. Soit $(E, \prec_E), (F, \prec_F)$ deux ensembles ordonnés. Une *application croissante* [resp. *décroissante*] $f : (E, \prec_E) \to (F \prec_F)$ est $f : E \to F$ telle que pour tout $x, y \in E$ avec $x \prec_E y$ on a $f(x) \prec_F f(y)$ [resp. $f(y) \prec_F f(x)$]

2.1.5 Exercice. Soit X un ensemble et $B \subset X$. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subset)$ et $u_B, \eta_B, c_B : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ définies par $u_B(A) = A \cup B, \eta_B(A) = A \cap B, c_B(A) = B \setminus A$. Prouver que u_B et η_B sont croissantes et que c_B est décroissante.

2.1.6 PROPOSITION. *Soit* $(E, \prec_E), (F, \prec_F), (G, \prec_G)$ *trois ensembles ordonnés et* $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F), g : (F, \prec_F) \to (G, \prec_G)$ *croissantes alors :* (1) $\text{Id}_E : (E, \prec_E) \to (E, \prec_E)$ *est croissante.* (2) *la composée* $g \circ f(E, \prec_E) \to (G, \prec_G)$ *est croissante.*

2.1.7 Exercice.
1. Prouver que l'application $f : (\mathbf{R}, \leq) \to (\mathbf{R}, \leq), f(x) = 1 - x$ est décroissante. Après l'avoir déterminée, dire si l'application composée $f \circ f$ est aussi décroissante.
2. Soit $(E, \prec_E), (F, \prec_F), (G, \prec_G)$ des ensembles ordonnés et $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$, $g : (F, \prec_F) \to (G, \prec_G)$ qui sont soit croissante soit décroissante. Dans chacun des trois cas non couverts par la proposition **2.1.6** que dire de l'application composée $g \circ f : (E, \prec_E) \to (G, \prec_G)$? Prouver les trois variantes de la proposition que vous venez d'énoncer.

2.1.8 Définition. Un *isomorphisme* d'un ens. ordonné $(E, \prec_E)$ sur un ens. ordoné $(G, \prec_G)$ est une application croissante $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$ t.q. il y a $g : (F, \prec_F) \to (E, \prec_E)$ croissante avec $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.

2.1.9 Remarque. Un isomorphisme d'ensembles ordonnés est une application croissante bijective mais la réciproque n'est pas vraie :

2.1.10 Exercice.
1. Prouver que si $(E, \prec_E)$ est un ensemble ordonné alors $\text{Id}_E : (E, \prec_E) \to (E, \prec_E)$ est croissante.
2. Prouver que $\text{Id}_{\mathcal{N}} : (\mathcal{N}, |) \to (\mathcal{N}, \leq)$ est croissante et que $\text{Id}_{\mathcal{N}} : (\mathcal{N}, \leq) \to (\mathcal{N}, |)$ ne l'est pas.
3. Est-ce que $\text{Id}_{\mathbf{N}} : (\mathbf{N}, |) \to (\mathbf{N}, \leq)$ est croissante ? (On utilisera que pour tout $x \in \mathbf{N}$ on a $x \cdot 0 = 0$: tout $x \in \mathbf{N}$ divise 0.) ?
4. Déduire de **2** un exemple de morphisme d'ensemble ordonné, bijectif mais non isomorphisme.