1 Evalualuation en un point, composition et racines.

1.0.1 Définition et Proposition. L'*évaluation des polynômes à coefficients dans A au point $b \in A$* est :

$$\mathrm{ev}_b : A[X] \to A, P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto P(b) = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k$$

On dit que $\mathrm{ev}_b(P) = P(b)$ est la *valeur en b du polynôme P*. Si $Q \in A[X]$ et $c, d \in A$ on a :

$$(c \cdot P + d \cdot Q)(b) = c \cdot P(b) + d \cdot Q(b) \qquad (P \cdot Q)(b) = P(b) \cdot Q(b)$$

L'*application (polynomiale) associée au polynôme P* est : $\quad P : A \to A, b \mapsto P(b)$

1.0.2 Exemple. Si $A = \{0,1\}, P = X^2 - X, Q = 0 \in A[X]$. On a $P(0) = 0 = Q(0)$ et $P(1) = 0 = Q(0)$.
Ce sont deux polynômes distincts $P \neq Q$ de même application polynômiale associée : Bien que, si $A = \mathbb{R}$, cela soit souvent fait, il convient donc de ne pas confondre un polynôme $P \in A[X]$ et sont application polynomiale $P : A \to A$ associée.

1.0.3 Rappel. Les opérations $+$ et $\cdot$ dans $A[X]$ gardant les propriétés qu'elles avaient dans A, on répéte la contruction des polynômes et considére $A[X, Y] = (A[X])[Y]$ les polynômes à coefficients dans $A[X]$. On a donc $(A \subset) A[X] \subset A[X, Y]$
(un polynôme à coefficients dans A est un polynôme [de $(A[X])[Y]$, de degré 0] à coefficients dans $A[X]$, et aussi (en voyant ses coefficients dans $A[X] \supset A$) être considéré comme polynôme [de $A[Y] \subset (A[X])[Y]$, de degré $\deg(P)$] à coefficients dans $A[X]$.)

1.0.4 Définition. Soit $P, Q \in A[X]$. Le *polynôme composé* $P \circ Q$ est $P \circ Q = \mathrm{ev}_Q(P) \in A[X]$ l'image de $P \in A[Y] \subset (A[X])[Y]$ par $\mathrm{ev}_Q : (A[X])[Y] \to A[X]$. Ainsi si $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j, Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ on a $P \circ Q = P(Q) = \sum_{j=0}^{m} a_j Q^j = \sum_{j=0}^{m} a_j \big(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\big)^j \in A[X]$.

1.0.5 Exemples.

1. $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j, Q = X \in A[X] : P \circ Q = P(Q) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ (Cf. la notation $P(X)$ pour P).
2. Si $P = X^n$ et $Q = a + X$ alors $P \circ Q = (a + X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} X^k$ par la formule du binôme.
3. Si $Q = X + a$ et $P \in A[X]$ par Taylor $P = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)(X - a)^k$, d'où $P \circ Q = P(X + a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) X^k$

1.0.6 Exercice. Soit $P \in A[Y], Q = X + Y \in A[X, Y]$. Prouver : $P(X + Y) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)} Y^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X) Y^k$

1.0.7 Exercice. Soit $P, Q \in A[X]$ deux polynômes à coefficients dans A et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

(a) Déduire de l'identité remarquable de Taylor **1.0.6.** la formule $\frac{1}{n!}(P \cdot Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} P^{(n-k)} \cdot \frac{1}{k!} Q^{(k)}$

(b) En déduire la formule de Leibniz $(P \cdot Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$ pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de polynômes.

(c) Etablir les deux résultats précédents directement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

1.0.8 PROPOSITION (Dérivation des polynômes composés). *Soit $P, Q \in A[X]$ alors :*

$$(P \circ Q)' = D(P \circ Q) = \big(D(P) \circ Q\big) \cdot D(Q) = P'(Q) \cdot Q'$$

1.0.9 Notation. Soit une famille $a_0, \ldots, a_n \in A$ [resp. $P_0, \ldots P_n \in A[X]$] indicés par $0 \leq k \leq n$ de $n + 1$ éléments de A [resp. $A[X]$]. Pour chacun des indices k on note : $\prod_{0 \leq j \neq k \leq n} a_j$ resp. $\prod_{0 \leq j \neq k \leq n} P_j$ le produit dans A [resp. $A[X]$] pour les n indices j entre 0 et n qui sont distincts de k des a_j [resp P_j].

1.0.10 PROPOSITION (formule d'interpolation de Lagrange). *On suppose $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{0, 1\}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et $a_0, \ldots, a_n \in A$ et $b_0, \ldots, b_n \in A$ deux familles de $n + 1$ éléments de A indicées de 0 à n telles que les a_j sont deux à deux distincts : si $0 \leq i \neq j \leq n$ alors $a_i \neq a_j$.

Pour $0 \leq k \leq n$ posons $L_k = \dfrac{1}{\prod_{0 \leq j \neq k \leq n} (a_k - a_j)} \cdot \prod_{0 \leq j \neq k \leq n} (X - a_j)$ alors :

$$P = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot L_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{\prod_{0 \leq j \neq k \leq n} (a_k - a_j)} \cdot \prod_{0 \leq j \neq k \leq n} (X - a_j)$$

est un polynôme de degré au plus n qui, pour $0 \leq i \leq n$, vérifie $P(a_i) = b_i$.

1.0.11 Exemples. dans le cas $A=\mathbb{Q}$ et $n=1,2$ ou n quelconque et, pour $0\le k\le n, a_k=k$.

1. $L_0=\dfrac{1}{a_0-a_1}(X-a_1), L_1=\dfrac{1}{a_1-a_0}(X-a_0)$ et
$$P=\frac{b_0}{a_0-a_1}(X-a_1)+\frac{b_1}{a_1-a_0}(X-a_0)=\frac{b_0a_1-b_1a_0}{a_1-a_0}+\frac{b_1-b_0}{a_1-a_0}X$$
qui donne $(a_1-a_0)Y-(b_1-b_0)X=b_0a_1-b_1a_0$ comme équation d'une droite passant par (a_0,b_0) et (a_1,b_1).

2. $L_0=\dfrac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}(X-a_1)(X-a_2), L_1=\dfrac{1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}(X-a_1)(X-a_2), L_2=\dfrac{1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}(X-a_0)(X-a_1)$
$$P=\frac{b_0}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}(X-a_1)(X-a_2)+\frac{b_1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}(X-a_0)(X-a_1)+\frac{b_2}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}(X-a_0)(X-a_1)$$
$$=\frac{1}{(a_1-a_0)(a_2-a_1)(a_0-a_2)}\cdot\Big[b_0(a_1-a_2)\cdot(X-a_1)(X-a_2)+b_1(a_2-a_0)\cdot(X-a_2)(X-a_0)+b_2(a_0-a_1)\cdot(X-a_0)(X-a_1)\Big]$$

3. $L_n=\dfrac{1}{\prod\limits_{0\le j<n}(n-j)}\cdot\prod\limits_{0\le j<n}(X-j)=\dfrac{1}{\prod\limits_{k=n-j=1}^{n}k}\cdot\prod\limits_{j=0}^{n-1}(X-j)=\dfrac{1}{n!}\cdot\prod\limits_{j=0}^{n-1}(X-j)=\dbinom{X}{n}$
est le polynôme *coefficient binomial n parmi X.*

1.0.12 Exercice. Soit $k\in\mathbb{N}$ et $P=\binom{X}{k+1}, Q=\binom{X}{k}$. Etablir la relation du triangle de Pascal polynomiale : $P(X+1)-P=Q$.

1.0.13 Théorème. *Soit $P\in A[X]$ et $a\in A$ alors il y a $Q\in A[X]$ tel que $P-P(a)=(X-a)\cdot Q$*

Démonstration : [directe utilisant pour $k\ge 1$ l'identité remarquable $X^k-a^k=(X-a)\sum\limits_{l=0}^{k-1}a^{k-1-l}X^l$]... □

Démonstration : [alternative avec la formule de Taylor]... □

1.0.14 Définition et Proposition. Soit $P\in A[X]$ un polynôme de degré positif à coefficients dans A et $a\in A$
.
Alors il y a $k\in\mathbb{N}$, la *multiplicité de P en a* notée $k=\mathrm{mult}_a(P)$, et $Q\in A[X]$ de degré $\deg(Q)=\deg(P)-k$ avec $P=(X-a)^kQ$ et $Q(a)\neq 0$.
De plus k est le plus petit $l\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{l!}P^{(l)}(a)\neq 0$. Si $\mathrm{mult}_a(P)>0$ (c. a d. $P(a)=0$) a est dit *racine de P de multiplicité k.*

1.0.15 Corollaire. *Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k\in A[X]$ et $n+1$ points $a_0,\dots,a_n\in A$ de A deux à deux distincts (si $0\le i\neq j\le n$ alors $a_i\neq a_j$) tels que pour $0\le i\le n$ on ait $P(a_i)=0$ alors $P=0$.*

1.0.16 Exercice. Autre solution de **1.0.12.** : Remarquer pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\ge k+1, P(n+1)-P(n)-Q(n)=0$.

1.0.17 Rappel (Théorème de D'Alembert admis)**.** Un polynôme de degrépositif à coefficients complexe $0\neq P\in\mathbb{C}[X]$ a une racine $\alpha\in\mathbb{C}$.

1.0.18 Corollaire. *1. Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{C}[X], a_n\neq 0$ alors il y a $z_1\dots,z_n\in\mathbb{C}$ [resp. $\omega_1,\dots\omega_r\in\mathbb{C}$ (où si $1\le i\neq j\le r\le n,\omega_i\neq\omega_j$) et $1\le m_1,\dots,m_r\in\mathbb{N}$] tels que $P=a_n\prod\limits_{k=0}^{n}(X-z_k)=a_n\prod\limits_{l=0}^{r}(X-\omega_l)^{m_l}$*

2. Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ avec $a_n\neq 0$ alors il y a $x_1\dots,x_t\in\mathbb{R}, z_1\dots,z_s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ avec $t+2s=n$ [resp. $\lambda_1\dots,\lambda_r\in\mathbb{R},\omega_1\dots,\omega_\pi\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (où si $1\le i\neq j\le r\le t,\ 1\le u\neq v\le\pi\le s\lambda_i\neq\lambda_j,\omega_u\neq\omega_j$) et $1\le m_1,\dots,m_r,\nu_1,\dots,\nu_\pi\in\mathbb{N}$] tels que :
$$P=a_n\prod_{k=0}^{t}(X-x_k)\prod_{l=0}^{s}(X-z_l)(X-\overline{z_l})=a_n\prod_{l=0}^{r}(X-\lambda_l)^{m_l}\prod_{u=0}^{s}(X^2-2\Re(z_u)X+|z_u|^2)^{\nu_u}$$