Notations

$I, \mathcal{D}(I), F(I)$ désignent un intervalle réel, l'ensemble des fonctions réelles dérivables et celui de toutes les fonctiontions sur I.

1 Dérivées et formule de Leibniz d'ordre supérieur.

1.0.1 Exemples.
1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|$ est continue mais, non dérivable en 0.
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^{\frac{4}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4$ est dérivable de dérivée $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, qui n'est pas dérivable en 0.
3. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $k(x) = x^{\frac{4}{3}} \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable, de dérivée $k' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k'(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $k'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} sin(\frac{1}{x}) - x^{-\frac{2}{3}} \cos(\frac{1}{x})$ non continue (ni même bornée près de 0) [encore moins dérivable] en 0.
4. Il y a des exemples où ces phénomènes, au lieu de se produire en des points isolés [0 ici], se produisent en tout point de I.

1.0.2 Définitions. Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel. L'*ensemble des applications n-fois dérivables* [ou ayant *dérivées jusqu'à l'ordre n*] $\mathcal{D}^n(I)$ et, pour $0 \leq k \leq n$, les *applications dérivée $k^{ième}$* [ou *dérivée d'ordre k*] :

$$D^k\ (= D^{k,n}) : \mathcal{D}^n(I) \to \mathcal{D}^{n-k}(I),\ D^k(f) = f^{(k)}$$

sont définis par : $\mathcal{D}^0(I) = \mathcal{F}(I)$, $\mathcal{D}^1(I) = \mathcal{D}(I)$, $D^0 = \mathrm{Id}$, $D^1 = D$ et : $\mathcal{D}^{n+1}(I) = \left(D^n\right)^{-1}(\mathcal{D}(I))$ pour $0 \leq k \leq n$: $D^k\ (= D^{k,n+1}) = D^{k,n}_{|\mathcal{D}^{n+1}(I)}, f \mapsto f^{(k)}$ et : $D^{n+1}\ (= D^{n+1,n+1}) = D \circ D^{n,n}, f \mapsto f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

1.0.3 Proposition. *(i) (a) Une constante $f_c : \underset{t \mapsto c}{I \to \mathbb{R}}$ a des dérivées de tout ordre $k \geq 1$ et $f_c^k = 0$.*

(b) L'inclusion $i = i_I : \underset{t \mapsto t}{I \to \mathbb{R}}$ a des dérivées de tout ordre $k \geq 1$ et $i^1 = 1$ et pour $k \geq 2, .i^k = 0$

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors :

(ii) (linéarité) $\lambda f + \mu g : I \to \mathbb{R}$ a des dérivées jusqu'à l'ordre n et, pour $0 \leq k \leq n$ $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$

(iii) (Leibniz) $f \cdot g : I \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g(t)$ a des dérivées jusqu'à l'ordre n et, pour $0 \leq k \leq n$:

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)} \cdot g^{(i)}$$

1.0.4 Remarques.
1. (a) Les ensembles $\mathcal{D}^n(I) \subset \cdots \subset \mathcal{D}^n(I) \cdots \subset \mathcal{D}^0(I) = \mathcal{F}(I)$ des fonctions réelles sur l'intervalle I qui ont des dérivées jusquà l'ordre $0 \leq k \leq n$ est une suite de $n+1$ sous-espaces vectoriels emboités de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$ de toutes les fonctions réelles sur I et
   (b) les applications dérivée $k^{\text{ième}}$ $D^k : \mathcal{D}^n(I) \to \mathcal{D}^{n-k}(I) \subset \mathcal{F}(I), f \mapsto f^{(k)}$ sont linéaires.
2. Si $f \in \mathcal{D}^n(I)$ alors, pour $0 \leq k \leq n$, on a : $\mathcal{D}^n(I) = \left(D^k\right)^{-1}(D^{n-k}(I)), f^{(n-k)} \in \mathcal{D}^k(I)$ et $f^{(n)} = \left(f^{(n-k)}\right)^{(k)}$

1.0.5 Exemples. Les fonctions suivantes ont des dérivées de tout ordre :
1. Si $m \in \mathbb{N}$ la fonction $p_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto p_n(x) = x^m$, puissance $m^{\text{ième}}$ et si $k \geq 1$ on a :

$$p_n^{(k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_n^{(k)}(x) = \Big[\prod_{h=0}^{k-1}(m-h)\Big]x^{m-k} = k!\binom{m}{k}x^{m-k}$$

ainsi, si $k > m$ la dérivée $k^{\text{ième}}$ $p_m^{(k)}$ est nulle. Plus généralement les puissances d'exposants entiers relatifs et réels :
   (a) Si $n \in \mathbb{Z}, p_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, p_n(x) = x^n$ et si $k \geq 1$ on a :

$$p_n^{(k)} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto p_n^{(k)}(x) = \Big[\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)\Big]x^{n-k} = k!\binom{n}{k}x^{n-k}$$

   (b) Si $\alpha \in \mathbb{R}, p_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto p_n(x) = x^\alpha$ et si $k \geq 1$ on a :

$$p_\alpha^{(k)} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, p_\alpha^{(k)}(x) = \Big[\prod_{h=0}^{k-1}(\alpha-h)\Big]x^{\alpha-k} = k!\binom{n}{k}x^{\alpha-k}$$

2. La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) = e^x$ exponentielle et si $k \geq 0$ on a : $\exp^{(k)} = \exp$
3. $\mathrm{Log} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \mathrm{Log}^{(1)} = p_{-1}$, si $k > 1$:
   $\mathrm{Log}^{(k)} = p_{-1}^{(k-1)} = \big[\prod_{h=0}^{k-2}(-(1+h))\big]p_{-k} = (k-1)!\binom{-1}{k-1}p_{-k}, x \mapsto (-1)^{k-1}\,(k-1)!\,x^{-k}$
4. Les fonctions trigonométriques $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et si $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sin^{(2m)} = (-1)^m \sin,,\quad \sin^{(2m+1)} = (-1)^m \cos,\quad \cos^{(2m)} = (-1)^m \cos,\quad \cos^{(2m+1)} = (-1)^{m+1} \sin$$

1.0.6 Exercices.

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h_a(t) = at$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n. Prouver que $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = f(ax)$ a des dérivées jusqu'à l'ordre n et que si $0 \leq k \leq n$ on a $f_a^{(k)} = a^k f^{(k)} \circ h_a : t \mapsto a^k f^{(k)} \circ h_a(t) = a^k f^{(k)}(at)$.
   (b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}, g(x) = e^{bx}$. Déterminer la fonction produit $f \cdot g$, puis sa dérivée $n^{\text{ième}}$ d'abord directement, puis à l'aide de la formule de Leibniz. Que retrouve-t-on ainsi ?
2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction produit $p = p_\alpha \cdot p_\beta :]0, \infty[, x \mapsto x^\alpha \cdot x^\beta$. Calculer si $n \in \mathbb{N}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de p, d'abord directement à partir du résultat précédemment obtenu, puis à l'aide de la formule de Leibniz. En déduire une relation reliant les coefficients binomiaux généralisés $\binom{\alpha+\beta}{n}, \binom{\alpha}{k}, \binom{\beta}{l}$ pour $0 \leq k, l \leq n$. Puis si $\alpha = m, \beta = p \in \mathbb{N}$, par un argument de dénombrement, démontrer cette relation.

2 La formule de Taylor.

2.0.7 LEMME. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ alors :*

$$\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l f^{(n-l)} \cdot g^{(l)}\Big)' = f^{(n+1)} \cdot g + (-1)^n f \cdot g^{(n+1)}$$

2.0.8 THÉORÈME ($(n+1)^{\text{ième}}$ formule de Taylor). *Si $f : I \to \mathbb{R}$ a des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ et $a, b \in I$. Alors la fonction $t \mapsto f^{(n+1)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^n}{n!}$ admet une primitive et :*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\, dt$$

$$= f(a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^i + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\, dt$$

Démonstration : [avec le lemme]... □

Démonstration : [alternative par récurrence et intégration par partie]... □

2.0.9 Exemples. On reprend les exemples **1.0.5** et, si $n \in \mathbb{N}$, applique la $(n+1)^{\text{ième}}$ formule de Taylor. Pour simplifier l'expression de $f^{(k)}(a)$ on suppose, suivant les cas $a = 1$ ou $a = 0$, et pose $b = x$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $b^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}(b-a)^k + \int_a^b \binom{m}{n+1}(b-t)^n \cdot t^{m-(n+1)}\, dt$.

   Plus généralement : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1, +\infty[$ on a : $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \int_0^x (n+1)\binom{\alpha}{n+1}(x-t)^n \cdot (1+t)^{\alpha-(n+1)}\, dt$
2. Si $x \in \mathbb{R}$ on a : $\quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\, dt$
3. Si $x \in]-1, +\infty[$ on a : $\quad \mathrm{Log}(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (-1)^{n-1} \frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}\, dt$
4. Si $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin(t)\, dt = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos(t)\, dt$

   $\cos(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m}}{(2m)!} \sin(t)\, dt = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos(t)\, dt$

2.0.10 Remarque. Si $a < b$ et pour $a \leq t \leq b$ on a $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$ alors on peut encadrer le «reste primitive» :

$$m\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\, dt \leq M\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

par exemple si $0 \leq t \leq x$ on a $1 \leq e^t \leq e^x$ donc : $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$