1 Primitives des fractions rationnelles réelles.

Soit I un intervalle réel et $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle réelle *définie sur I, c. a d.* pour tout $s \in I$ on a $Q(s) \neq 0$. La fonction associée est aussi notée

$$\frac{P}{Q} : I \to \mathbb{R}, s \mapsto \frac{P(s)}{Q(s)}$$

1.0.1 Rappel. Si Q est de degré $q \geq 1$, de factorisation réduite $Q = a_q \prod_{k=1}^{r}(X - t_k)^{m_k} \prod_{l=1}^{s}((X - b_k)^2 + c_k^2)^{\nu_k}$ alors il y a $E \in \mathbb{R}[X]$ et pour $1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s$ et $1 \leq m \leq m_k, 1 \leq n \leq \nu_l$ des $\lambda_{k,m}, \alpha_{l,n}, \beta_{l,n} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,m}}{(X - t_k)^m} + \sum_{l=1}^{s}\sum_{n=1}^{\nu_l} \frac{2\alpha_{l,n}(X - b_k) + \beta_{l,n}}{\left((X - b_k)^2 + c_k^2\right)^n}$$

Cette décomposition en éléments simples permet, par linéarité, de calculer une primitive de $\frac{P}{Q}$;

Si $E = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors $F = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{j} X^j$ est une primitive de E.

Si $m, n > 1$ alors $\frac{1}{1-m}\frac{\lambda}{(X - t)^{m-1}}$ et $\frac{1}{1-n}\frac{\alpha}{(X - b)^2 + c^2)^{n-1}}$ sont primitives de $\frac{\lambda}{(X - t)^m}$ et $\frac{2\alpha(X - b)}{\left((X - b)^2 + c^2\right)^n}$.

Les fonctions $I \ni s \mapsto \lambda \operatorname{Log}(|s - t|), \alpha \operatorname{Log}((s - b)^2 + c^2)$ sont primitives de $I \ni s \mapsto \frac{\lambda}{X - t}, \frac{2\alpha(X - b)}{(X - b)^2 + c^2}$.

Il reste donc, pour $1 \leq n \in \mathbb{N}$ de connaître des primitives des fonctions associées à $\frac{\beta}{\left((X - b)^2 + c^2\right)^n}$.

Il suffit, pour $u, v \in \mathbb{R}$ de calculer $I_n = \int_v^w \frac{1}{\left(u^2 + 1\right)^n}\, du$ car par changement de variable $s = cu + b$:

$$\int_x^y \frac{\beta}{\left((s - b)^2 + c^2\right)^n}\, ds = \int_{\frac{x-b}{c}}^{\frac{y-b}{c}} \frac{\beta}{\left(c^2u^2 + c^2\right)^n}\, cdu = \beta c^{1-2n} \int_{\frac{x-b}{c}}^{\frac{y-b}{c}} \frac{1}{\left(u^2 + 1\right)^n}\, du$$

Ce qui s'obtient par intégration par partie et la fonction arctangente :

1.0.2 Lemme. *1.* $I_1 = \left[\operatorname{Arctg}(u)\right]_v^w$

2. si $n > 1$ *on a* $I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \left[\frac{u}{(2n-2)(u^2 + 1}\right]_v^w$

1.0.3 Exemples. 1. $\int_x^y \frac{ds}{s^3 - s} = \int_x^y (-\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1})\, ds = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Log} \frac{|(s-1)(s+1)|}{s^2}\right]_x^y$

2. $\int_x^y \frac{s+2}{s^4 + s^2}\, ds = \int_x^y (\frac{2}{s^2} - \frac{2+s}{s^2+1} + \frac{1}{s})\, ds = \left[-\frac{2}{s} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{s^2}{s^2+1} - 2\operatorname{Arctg}(s)\right]_x^y$

2 Relations sur un ensemble.

2.0.4 Définitions. Soit un ensemble E. Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur* E est la donnée d'une partie $\Gamma_{\mathcal{R}} \subset E \times E$, dite *graphe* de la relation $\mathcal{R}$, de l'ensemble produit $E \times E$ de E par lui même.
Si $x, y \in E$ on dit que x et y (dans cet ordre) sont *liés par la relation* $\mathcal{R}$ et on note $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$

2.0.5 Exemples. 1. Sur tout ensemble E l'*égalité* $=$ sur E est une relation binaire.
Son graphe est $\Gamma_= = \Delta_E = \{(x, x) \mid x \in E\}$, la *diagonale* de l'ensemble E.

2. Si X est un ensemble, l'inclusion $\subset$ est une relation sur l'ensemble $E = \mathcal{P}(X)$ des parties de X.
3. Soit $\mathcal{N} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'ensemble des entiers positifs la relation *(strictement) inférieur* $<$ sur $\mathcal{N}$ est définie par : pour $m, n \in \mathcal{N}$ alors $m < n$ si et seulement si il y a $l \in \mathcal{N}$ tel que $l + m = n$.

4. La relation *inférieur ou égal* $\leq$ sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est définie par :
pour $m, n \in \mathbb{N}$, alors $m < n$ si et seulement si il y a $l \in \mathbb{N}$ tel que $l + m = n$.
5. La relation *divise* $|$ sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers positifs est définie par :
si $m, n \in \mathbb{N}$ alors $m|n$ si il y a $l \in \mathcal{N}$ tel que $l \cdot m = n$.
6. Si V est un espace vectoriel réel la *colinéarité* $\mathcal{L}$ *sur* V est définie par :
pour $u, v \in V$, alors $u\mathcal{L}v$ si et seulement si et seulement si il y a $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $x \cdot u + y \cdot v = 0$.
2.0.6 Exercice. Prouver que si $0 \neq v \in V$ alors pour tout $u \in V$ $u\mathcal{L}v$ ssi il y a $t \in \mathbb{R}$ tel que $u = t \cdot v$.

2.1 Propriétés d'une relation binaires sur un ensemble.

2.1.1 Définitions. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble X. La relation $\mathcal{R}$ est :

1. *réflexive* si pour tout $x \in E$ on a $x\mathcal{R}x$ (équivalent à le graphe $\Gamma_{\mathcal{R}} \supset \Delta_X$ contient la diagonale).
2. *symétrique* si pour tout $x, y \in E$ alors $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$
3. *antisymétrique* si pour tout $x, y \in E$ alors ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) implique $x = y$
4. *transitive* si pour tout $x, y, z \in E$ alors ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) implique $x\mathcal{R}z$

2.1.2 Exercices. (a) Dans **2.0.5** : **1**, **2**, **4**, **5**,**6** sont réflexives, mais **3** ne l'est pas.
(b) Dans **2.0.5** : **1** et **6** sont symétriques, mais **3**, **4**, **5** ne le sont pas et **2** ne l'est que si $X = \emptyset$.
(c) Dans **2.0.5** : **1**, **2**,**3**, **4**, **5** sont antisymétriques, mais **6** ne l'est que si $V = 0$.
(d) Dans **2.0.5** : **1**, **2**,**3**, **4**, **5** sont transitives, mais **6** ne l'est que si $\dim(V) \leq 1$.

2.2 Définition et exemples de relations d'équivalence.

2.2.1 Définition. Une *relation d'équivalence* sur un ensemble E est une relation $\mathcal{R}$ sur E qui est reflexive, symétrique et transitive. On note alors $x \equiv y \mod \mathcal{R}$ pour $x\mathcal{R}y$.

2.2.2 Exemples. Dans **2.0.5** : **1** est d'équivalence mais **2**,**3**, **4**, **5** et, si $\dim(V) > 1$ **6** ne le sont pas.
Par contre la relation induite par la colinéarité **6** sur $V \setminus \{0\}$ est une relation d'équivalence.

2.2.3 Exercices. 1. Si $X = \mathcal{N}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $m, n, N \in X$ on note $m \equiv n \mod(N)$ et dit *m congru à n modulo N*, si il y a $p, q \in X$ tels que $m + pN = n + qN$. Prouver que $\equiv \mod(N)$ est une relation d'équivalence.
2. Prouver que si $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{0, 1\}, B = \mathcal{N}, \mathbb{Z}, A[X]$ et $E = B \times (B \setminus \{0\})$ alors $\mathcal{R}$ définie par $(P_1, Q_1)\mathcal{R}(P_2, Q_2)$ ssi il y a $Q \in (B \setminus \{0\})$ tel que $Q \cdot (P_1 \cdot Q_2 - P_2 \cdot Q_1) = 0$ est une relation d'équivalence.

2.3 Classes d'équivalence et ensemble quotient.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E

2.3.1 Définition. Soit $x \in E$. La *classe (d'équivalence) de* $x \in E$ est $\overline{x} = \overline{x}_{\mathcal{R}} = \{t \in E \,|\, t \equiv x \mod \mathcal{R}\}$

2.3.2 Exemple. Soit V espace vectoriel réel, $\mathcal{L}$ la colinéarité sur $E = V \setminus \{0\}$ et $x \in E$ alors $\overline{x} = \{t \cdot x \,|\, 0 \neq t \in \mathbb{R}\}$.

2.3.3 Proposition. *Pour tout $x \in E$ on a $x \in \overline{x}$ donc $\overline{x} \neq \emptyset$ et pour tout $y \in E$ il y a équivalence entre :*
(1) $x \equiv y \mod \mathcal{R}$ (2) $\overline{x} \subset \overline{y}$ (3) $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ (4) $\overline{x} = \overline{y}$

2.3.4 Définition. Une *partition d'un* ensemble E est une famille $(Y_t)_{t \in T}$ de parties $T_t \subset E$ telles que
(1) $\forall t \in T \quad Y_t \neq \emptyset$ (2) $\forall s \neq t \in T \; Y_s \neq Y_t$ (3) $\forall x \in E \; \exists t \in T, x \in Y_t$. On note $X = \amalg_{t \in T} Y_t$.

La proposition **2.3.3** équivaut donc à *Les classes d'équivalences d'une équivalence $\mathcal{R}$ sur E forment une partition de E.*

2.3.5 Définitions. L'*ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$* est l'ensemble $E/\mathcal{R} = \{\overline{x} \,|\, x \in E\}$ des classes déquivalences.
L'*application quotient de* $\mathcal{R}$ est l'application $\pi = \pi_{\mathcal{R}} : E \to E/\mathcal{R}, \pi(x) = \overline{x}$ associant à chaque élément sa classe.
Un système de représentants de $\mathcal{R}$ dans E est une partie $R \subset E$ contenant un et un seul élément par classe d'équivalence : pour tout $x \in E$ $\operatorname{card}(\overline{x} \cap R) = 1$.

2.3.6 Exemples. 1. Les ensembles quotients des relatins d'équivalences de **2.2.3** **2** sont respectivement $\mathbb{Q}_{>0}$ les rationnels positifs, $\mathbb{Q}$ les rationnels et $A(X)$ les fractions rationnelles à coefficients dans A.
2. $\{1, \ldots, N\}$ est un système de représentant pour $\equiv \mod(N)$ sur $\mathcal{N}$.
3. L'ensemble quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par la colinéarité est noté $P^1(\mathbb{R})$, la *droite projective réelle*, la classe d'équivalence de $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est notée $[u : v] = \overline{(u, v)} \in P^1(\mathbb{R})$. Ainsi $\{[t : 1] \,|\, t \in \mathbb{R}\} \cup \{[1 : 0]\}$ est un système de représentants de la colinéarité et $[t : 1] \mapsto t, [1 : 0] \mapsto \infty$ identifie $P^1(\mathbb{R})$ à $\mathcal{R} \cup \infty$.