1 «Rappels» de calcul différentiel.

1.0.1 Proposition (Propriétés algébriques de la dérivation).

(i) constante et inclusion $\underset{t\mapsto c;\ t\mapsto t}{f_c, i_I} : I \to \mathbb{R}$ *sont dérivables* $f_c' = 0,\ i' = 1 (= f_1)$.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ *dérivables et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *alors :*

(ii) (linéarité de la dérivation) $\lambda f + \mu g$ *est dérivable :* $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

(iii) (Formule de Leibniz) fg *dérivable :* $\big(fg\big)' = f'g + fg'$ *[si* $fg(t) \neq 0$, $\frac{(fg)'}{fg} t) = \frac{f'}{f}(t) + \frac{g'}{g}(t)$*]*

(iv) Si $\forall t \in I$, $g(t) \neq 0$ *alors* $\frac{f(t)}{g(t)}$ *est dérivable :* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

1.0.2 Exercice. Soit I un intervalle réel et $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $gh = f$. Prouver $gh' = f' - g'h$, en déduire, si $\forall t \in I,\ g(t) \neq 0$ alors : $h'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}$.

1.0.3 Proposition. *Soit* $\varphi : J \to I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivables alors*

(i) (dérivée des fonctions composées) $f \circ \varphi$ *est dérivable et :* $\boxed{\big(f \circ \varphi\big)' = \big(f' \circ \varphi\big) \cdot \varphi'}$

(ii) (dérivée des fonctions réciproques) Si φ *est bijective et* $\forall t \in J$, $\varphi'(t) \neq 0$ *alors* $\varphi^{-1} : I \to J$ *est dérivable et* $\forall t \in J$ *on a :* $\boxed{\big(\varphi^{-1}\big)'(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)}}$

1.0.4 Exemples. 1. Exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est dérivable, bijective et $\boxed{\exp' = \exp}$

Logarithme : $\mathrm{Log} \overset{\text{Déf}}{=\!=} \exp^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{Log}'(\exp(t)) = \dfrac{1}{\exp(t)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\boxed{\mathrm{Log}'(x) = \frac{1}{x}}$

1.0.5 Exercice. En définissant exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la bijection réciproque de Log [où $\mathrm{Log}'(t) = \frac{1}{t}$], prouver que l'exponentielle est dérivable et vérifie $\exp' = \exp$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, p_\alpha(t) = \exp(\alpha \,\mathrm{Log}(t)) = e^{\alpha \,\mathrm{Log}(t)}\ (= t^\alpha)$, alors : $\boxed{p_\alpha'(t) = \alpha t^{\alpha - 1}}$

1.0.6 Exercice. Pour $\alpha = -1$, déduire la formule précédente de **??**, puis prouver la pour $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ entier relatif par récurrence sur $|n|$ et la formule de Leibniz .

1.0.7 Théorème (des fonctions monotones dérivables). *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable alors* f *est croissante [resp. décroissante] ssi pour tout* $t \in I$ *on a* $f'(t) \geq 0$ *[resp.* $f'(t) \leq 0$*]*

En particulier f *est constante si et seulement si sa dérivée est la fonction nulle.*

1.0.8 Exercice. Déduire de l'énoncé de de **??** sans les resp. cet énoncé avec les resp.

2 Fonctions circulaires et leurs fonctions réciproques.

2.1 sin et cos.

$M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est à distance t dans le sens trigonométrique de $A = (1, 0)$ sur le *cercle trigonométrique* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ donc : $\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$

cos et sin sont 2π *périodiques* : $t\forall \in \mathbb{R}, \cos(t + 2\pi) = \cos(t), \quad \sin(t + 2\pi) = \sin(t)$

$$\sin^{-1}(0) = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \qquad \cos^{-1}(0) = \{\frac{2n+1}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

et dérivables de dérivées : $\boxed{\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin}$

2.1.1 Exercice. Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s(t) = \frac{\pi}{2} - t$. Expliquer géométriquement la relation $\cos = \sin \circ s$. Déterminer $s \circ s$. En déduire : (a) la relation $\sin = \cos \circ s$, puis [sachant sin dérivable], (b) que cos est dérivable avec $\cos' = -\sin$ et [connaissant $\cos^{-1}(0)$], (c) $\cos^{-1}(0) = \left\{\frac{2n+1}{2}\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

2.2 tg, Arctg, Arcsin **et** Arccos.

$\mathrm{tg} = \dfrac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \cos^{-1}(0) \to \mathbb{R}$ est dérivable : $\boxed{\mathrm{tg}' = 1 + \mathrm{tg}^2 = \dfrac{1}{\cos^2}}$, induisant une bijection

$\mathrm{tg}_| :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, de réciproque $\mathrm{Arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dérivable : $\boxed{\mathrm{Arctg}' : \mathbb{R} \to]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[,\ \mathrm{Arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

sinus et cosinus induisent des bijections : $\sin_| : [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\cos_| : [0, \pi] \to [-1, 1]$
Leurs bijections réciproques $\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ et $\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

sont dérivables sur $]-1, 1[$ et $\forall u, v \in]-1, 1[$ on a : $\boxed{\mathrm{Arcsin}'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad \mathrm{Arccos}'(v) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}}$

2.2.1 Exercice. Vérifier si $s, t \in]-1, 1[$ (a) $\sin(\mathrm{Arccos}(s)) = \sqrt{1-s^2}$, (b) $\cos(\mathrm{Arcsin}((t)) = \sqrt{1-t^2}$

Déterminer les applications $\mathrm{Arccos} \circ \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ et $\mathrm{Arcsin} \circ \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

3 Primitives et leur calcul.

3.1 Primitives et intégrales d'une fonction.

3.1.1 Définition et Proposition. $f : I \to \mathbb{R}$ a une *primitive* $F : I \to \mathbb{R}$ (est *primitivable*) si F est continue, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $f = F'$. En ce cas F_1 est primitive de f ssi $F_1 - F$ est constante.

3.1.2 Définition. Soit F primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ et $x, y \in I$. L'*intégrale de* x *à* y de f est :

$$\boxed{\int_x^y f \overset{\text{syn}}{=\!=} \int_x^y f(t)\, dt \overset{\text{Déf}}{:=} F(y) - F(x) \overset{\text{Déf}}{=:} [F]_x^y}$$

3.2 Propriétés des primitives.

3.2.1 Proposition (Changement de variable). *Soit $\varphi : J \to I$ continue, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F. Alors $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admet $F \circ \varphi$ comme primitive, ainsi pour tout $x, y \in J$ on a :* $\boxed{\displaystyle\int_x^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(s)\, ds}$

3.2.2 Exercice. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, f(t) \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $x \in]-1, 1[$

Remarquer $f(t) = \dfrac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(-2t)$ et $f(t) = \cos(\mathrm{Arccos}(t)) \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}} = \sin'(\mathrm{Arccos}(t))\, \mathrm{Arccos}'(t)$.

En déduire deux calculs de $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ dont vous déduirez une autre solution de l'exercice **??**.

3.2.3 Proposition (intégration par partie). *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec g dérivable, f ayant une primitive F et Fg' ayant une primitive. Alors fg admet une primitive et si $x, y \in I$ on a :*

$$\boxed{\int_x^y fg = [Fg]_x^y - \int_x^y Fg'}$$

3.2.4 Exercice. Calculer la dérivée de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(t) = \frac{1}{2}[\mathrm{Arctg}(t) + \frac{t}{1+t^2}]$ et retrouver le résultat de l'exemple précédemment donné en cours.

3.2.5 Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la méthode du cours [avec deux intégrations par partie] calculer :

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^3}\, dt \qquad .$$