Devoir 5 (suite des contrôles 2) [à rendre aux TD des 23 et 24 Novembre 2006]

6) Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x & & + & z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & t & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 4z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & t & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 4z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 1 \end{cases}$$

7) $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel $< (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Rappeler la preuve de *si* $x, y \in \mathbf{R}^n$ *alors on a la majoration*

$$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs x *et* y *sont liés.*

8) On rappelle que si $x, y \in \mathbf{R}^3$ on a la relation $\|x \wedge y\|^2 + < x, y >^2 = \|x\| \cdot \|y\|^2$

a) Soit $u, v, w \in \mathbf{R}^3$ rappeler la définition du déterminant $\det(u, v, w)$ des vecteurs u, v, w, puis déduire de a) (et de la relation rappelée en **7)**) que l'on a

$$|\det(u, v, w)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

avec égalité si et seulement si $< u, v >=< v, w >=< w, u >= 0$.

b) Déduire de b) et de la règle de Sarrus que si les coordonnées de u, v et w sont entières de valeur absolue au plus 1 [$c.a.d.$ dans $\{-1, 0, 1\}$] alors $|\det(u, v, w)| \leq 4$.

c) Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.