Devoir 3

Questions subsidiaires au contrôle Mardi 10 octobre 2006 et/ou devoir [à rendre les 19 et 20 Octobre 2006]

Retour sur **3)**

3') Soit $\{r, r'\} \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des racines de l'équation $(1+i)X^2 - 6X + 4 - 4i = 0$

a) Calculer, et les exprimer sous la forme $a + ib; a, b \in \mathbf{R}$, les nombres $r + r'$ et $r \cdot r'$.

b) Existe-t-il des nombres $z, z' \in \mathbf{C}$ tels que $|z| = |z'| = 2$ et $|z + z'| = 3\sqrt{2}$?

c) Déduire de a) et b) que r et r' sont de modules différents.

On suppose dorénavant $|r| < |r'|$.

d) Calculer, et les exprimer sous la forme $a + ib; a, b \in \mathbf{R}$, les nombres r et r'.

e) Calculer r^8 et $(r')^8$.

Suite du problème (préparation aux chapitres 3 et 4 du cours)

7) Dans le plan $\mathbf{R}^2$ on considère la droite D d'équation $29x + 41y = 47$.

a) Déduire de **6)** que D a un point (x, y) avec $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ des fractions de même dénominateur et telles que dénominateur et valeur absolue des numérateurs sont au plus 10 [*c.a.d.* $a, b, c \in \mathbf{Z}, c > 0, |a|, |b|, c \leq 10$].

b) Prouver qu'il y a des uniques $u, v \in \mathbf{Z}$ avec $u > 0$ tel que (u, v) et un vecteur directeur D et que pour tout vecteur directeur (u', v') de D à coefficients entiers il y a $k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$ tel que $(u', v') = k(u, v) = (ku, kv)$].

c) Vérifier que D contient $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ [ce qui reprouve a) sans utiliser **6)**].

c1) L'unité étant le centimètre, tracer la droite passant par les points $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + (\frac{u}{2}, \frac{v}{2})$.

c2) Comparer ce tracé de D et celui obtenu avec les points d'intersection avec les axes.

d) Prouver $D \cap \mathbf{Q} = \{(-\frac{1}{2} + u\frac{s}{2t}, \frac{3}{2} + v\frac{s}{2t})\ ;\ s, t \in \mathbf{Z} \text{ avec } t > 0\}$.

e) Soit $s \in \mathbf{Z}$. Tracer les graphes de $a, b : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, a(t) = 41s - t, b(t) = 3t - 29s$

En déduire que si $(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3$ avec $c > 0$ et $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \neq (\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) \in D \cap \mathbf{Q}^2$ alors

e1) l'un des nombres $|a|, |b|$ ou c est au moins 15.

e2) il y a un seul tel triplet avec tous les trois nombres $|a|, |b|$ et c au plus 15.

e3) L'unité étant 10 cm, tracer la droite[1]passant par $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $(\frac{13}{15}, \frac{8}{15})$.

e4) Auriez-vous pu prendre 10 cm pour unité dans la question c)?

[1] De c) puis e3) déduire graphiquement les points d'intersection $(\frac{47}{29}, 0)$ et $(0, \frac{47}{41})$ de D avec les axes et comparer la qualité des deux approximations de $\frac{47}{41} = 1,4634\ 14634\ 14634 \cdots$ et surtout $\frac{47}{29} = 1,6206896551724137931034482758\ 620 \cdots 758\ 620 \cdots 758\ \cdots$ ainsi obtenues.