Devoir à rendre aux TD de 8h du 3 octobre 2006

[Le contrôle continu du mardi 10 Octobre 2006 ressemblera au recto de ce devoir, efforcez-vous (quitte, dans **3)** à traiter moins de nombres et/ou à admettre **4)** b)) de rédiger ce qui est demandé sur le recto [(**1)** ou **2)**) et **3)** et **4)**] en moins d'1h30]

Question de cours
Répondre à une (et une seule) des deux questions suivantes

1) Démontrer l'inégalité triangulaire pour le module des nombres complexes.

2) Donner une équivalence d'échange entre quantificateurs et opérations logiques, ainsi qu'une implication (d'échange entre les quantificateurs et les opérations logiques) dont vous pourrez justifier par un contre-exemple que sa réciproque n'est pas vraie [on demande un contre-exemple différent de ceux donnés en cours].

Exercice

3) a) Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants

$$a = \frac{1+3i}{2+i}, \quad b = e^{2+i\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{21e^{i\pi} \cdot 3e^{i\frac{3\pi}{4}}}{9e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

b) Donner la forme trigonométrique des nombres complexes

$$d = 7 + i7, \quad e = \sqrt{3} + i, \quad f = \sqrt{2} - i\sqrt{6}, \quad g = 3 - i4$$

puis représentez sur une figure les points D, E, F, G d'affixes d, e, f, g

Problème

Soit a, b, c des entiers relatifs avec $a > 0$. On considère le trinôme

$$T(X) = aX^2 + bX + c$$

4) a) Prouver que si $x \in \mathbf{R}$ avec $a|x| > |b| + |ac| + 1$ alors $a|x| > |b| + 1$ et $|x| > |c|$.

b) En déduire que si $x \in \mathbf{R}$ et $|x| > \frac{|b|+|ac|+1}{a}$ alors $aT(x) = a^2x^2 + bax + ac \neq 0$.

c) Soit $K = \frac{|b|+|ac|+1}{a}$. Peut-on déduire de b) :

c1) $\exists x \in]K, +\infty[$ t.q. $aT(x) \neq 0$ c2) $\exists x \notin [-K, K]$ t.q. $aT(x) \neq 0$

c3) $\forall x \notin [-K, K]$ on a $aT(x) \neq 0$ c4) $\exists x \in [-K, K]$ t.q. $aT(x) = 0$

c5) Si $x \in \mathbf{R}$ est tel que $aT(x) = 0$ alors $x \in [-K, K]$

c6) Si $x \in \mathbf{R}$ est tel que $aT(x) \neq 0$ alors $x \notin [-K, K]$?

Quelles implications il y a-t-il entre celles de ces affirmations qui sont vraies?

5) Soit $r_1, r_2 \in \mathbf{C}$ les racines du trinôme $T(X)$, il se factorise donc en :

$$T(X) = a(X - r_1)(X - r_2)$$

Prouver que $a^2|r_2 - r_1|^2 = |b^2 - 4ac|$. En déduire que

$$\text{Si } 2a|x - r_1| < \sqrt{|b^2 - 4ac|} \quad \text{alors} \quad 2a|x - r_2| > \sqrt{|b^2 - 4ac|}$$

6) Soit $\frac{p}{q}$ une fraction de numérateur l'entier p et dénominateur l'entier positif q. Prouver que si les racines r_1 et r_2 ne sont pas rationnelles alors :

$$T(\frac{p}{q}) \geq \frac{1}{q^2}$$

7) Déduire de ce qui précède que si un réel $\alpha \in \mathbf{R}$ n'est pas rationnel et est racine d'un trinôme du second degré à coefficients entiers alors il y a un nombre L positif ne dépendant que des coefficients du trinôme tel que pour toute fraction $\frac{p}{q}$ on ait

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{L}{q^2}$$

Le nombre α dont l'écriture décimale est $0,101000001 \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{n!-1 \text{ zéros}} 1 \cdots$

[le $n^{\text{ième}}$ paquet de chiffres après la virgule a $n!$ chiffres : $n! - 1$ "zéros" suivis d'un "un"]
est-il racine d'un trinôme du second degré non nul à coefficients entiers?

Remarque. Ce nombre α n'est pas l'exemple $\beta = 0,101001 \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{n-1 \text{ zéros}} 1 \cdots$ donné dans le cours où l'on avait affirmé (oralement) $\beta \notin \mathbf{Q}$.

Questions subsidiaires. a) Pourquoi β n'est pas rationnel?

b) Le nombre β est-il racine d'un trinôme du second degré non nul à coefficients entiers?