Second contrôle Mardi 14 Novembre 2006 groupe 2

Poly, notes de cours, calculatrice, téléphone portable interdits, le barème est donné à titre indicatif

Question de cours (sur 6 points)

Répondre à une (et une seule) des deux questions **1)** ou **2)** suivantes :

1) Soit E un ensemble, n un entier positif.

Prouver qu'une application $f : \{1, \ldots, n\} \to E$ est surjective si et seulement si il y a une application $g : E \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$

2) Soit m, n des entiers positifs et $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^m$ une famille de n vecteurs de $\mathbf{R}^m$.

a) Rappeler les définitions de a1) *la famille* $v_1, \ldots, v_n$ *est libre* et a2) *la famille* $v_1, \ldots, v_n$ *est liée.*

b) Prouver que la famille $v_1, \ldots, v_n$ est liée si et seulement si l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot v_k$ n'est pas injective.

Exercices (sur 5 points chacun)

3) Soit a, b, c, d, m, n des entiers positifs avec $1 \leq a < c \leq m$ et $1 \leq b < d \leq n$, $X = \{(i,j) \in \mathbf{N}^2; 1 \leq i \leq a \text{ et } b \leq j \leq n\}$ et $Y = \{(i,j) \in \mathbf{N}^2; 1 \leq i \leq c \text{ et } d \leq j \leq n\}$

a) Représenter X et Y sur une figure et déterminer $X \cap Y$.

b) Déterminer les nombres d'éléments $\mathrm{Card}(X), \mathrm{Card}(Y)$ et $\mathrm{Card}(X \cap Y)$.

c) En déduire le nombre d'éléments $\mathrm{Card}(X \cup Y)$.

4) Le plan $\mathbf{R}^2$ est muni du repère usuel [l'axe des x est $\mathbf{R} \times \{0\}$ et l'axe des y est $\{0\} \times \mathbf{R}$]. On rappelle qu'une droite d non parallèle à l'axe des y a une unique équation de la forme $y = tx + b$, le réel t est la *pente de* la droite $d = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y = tx + b\}$.

a) Déterminer l'intersection de la droite $d(t)$ de pente t passant par $B = (-1, 0)$ avec le cercle $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1.

b) En déduire que si $t \in \mathbf{R}$ alors $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \in \mathcal{C}$ et l'application ainsi définie

$$f : \mathbf{R} \to \mathcal{C}, f(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$$

est injective, est-elle bijective? quelle est son image?

5) Si $x, y \in \mathbf{R}^n$ on note $< x, y >$ le produit scalaire de x et de y et $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$. On rappelle qu'un parallélogramme dans $\mathbf{R}^n$ est une suite de quatre points A, B, C, D telle que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. **5.1)**Soit A, B, C, D un parallélogramme dans $\mathbf{R}^n$

a) Prouver $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. En déduire

(RP) $$\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 + \|\overrightarrow{DA}\|^2$$

b) Soit $u, v, w \in \mathbf{R}^n$. Etablir les relations

$$\|u\|^2 + \|w-u\|^2 + \|v-w\|^2 + \|-v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|w\|^2 + \|v\|^2 - < w, u+v >\big)$$
$$\|w\|^2 + \|v-u\|^2 = \|w\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 < u, v >$$

5.2) Déduire de **5.1)**) qu'une suite de quatre points $A, B, C, D \in \mathbf{R}^n$ est un parallélogramme si et seulement si (RP) (la *relation du parallélogramme*) est satisfaite.

Second contrle Mardi 14 Novembre 2006 groupe 1

Poly, notes de cours, calculatrice, téléphone portable interdits, le barme est donn titre indicatif

Question de cours (sur 6 points)

Répondre une (et une seule) des deux questions **1)** ou **2)** suivantes :

1) Soit E un ensemble, n un entier positif.

Prouver qu'une application $f : \{1, \dots, n\} \to E$ est surjective si et seulement si il y a une application $g : E \to \{1, \dots, n\}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$

2) a) Donner la définition du module et de l'argument d'un nombre complexe z non nul.

b) Quels sont le module et l'argument du nombre complexe $-1 + \sqrt{3}\, i$.

Exercices (sur 5 points chacun)

3) Soit a, b, c, d, m, n des entiers positifs avec $1 \leq a < c \leq m$ et $1 \leq b < d \leq n$, $X = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 ; 1 \leq i \leq a \text{ et } b \leq j \leq n\}$ et $Y = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 ; 1 \leq i \leq c \text{ et } d \leq j \leq n\}$

a) Représenter X et Y sur une figure et déterminer $X \cap Y$.

b) Déterminer les nombres d'éléments $\mathrm{Card}(X), \mathrm{Card}(Y)$ et $\mathrm{Card}(X \cap Y)$.

c) En déduire le nombre d'lments $\mathrm{Card}(X \cup Y)$.

4) Le plan $\mathbf{R}^2$ est muni du repère usuel [l'axe des x est $\mathbf{R} \times \{0\}$ et l'axe des y est $\{0\} \times \mathbf{R}$]. On rappelle qu'une droite d non paralle l'axe des y a une unique équation de la forme $y = tx + b$, le réel t est la *pente de* la droite $d = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; y = tx + b\}$.

a) Déterminer l'intersection de la droite $d(t)$ de pente t passant par $B = (-1, 0)$ avec le cercle $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$ de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1.

b) En déduire que si $t \in \mathbf{R}$ alors $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \in \mathcal{C}$ et l'application ainsi dfinie

$$f : \mathbf{R} \to \mathcal{C}, f(t) = (\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2})$$

est injective, est-elle bijective? quelle est son image?

5) a) Montrer que les solutions de l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (E) sont $e^{i2k\pi/4}$, $1 \leq k \leq 4$.

b) Montrer que si z est solution de l'équation (E), $z + 1/z$ est solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ (E').

c) Résoudre l'équation (E') et en déduire la valeur de $cos(2\pi/5)$