Troisième contrôle Mardi 5 Décembre 2006

Poly, notes de cours, calculatrice, téléphone portable interdits,

Question de cours

Répondre à une (et une seule) des deux questions **1)** ou **2)** suivantes :

1) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Soit n un entier positif, E un espace vectoriel réel et $v_1, \ldots, v_n \in E$ une famille de n vecteurs de E.

a) Donner la définition de *la famille* $v_1, \ldots, v_n$ *est libre* .

b) Prouver que la famille $v_1, \ldots, v_n$ est libre si et seulement si l'application $f : \mathbf{R}^n \to E, f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot v_k$ est injective.

Exercices

3) Soit $n \geq 2$ un entier au moins égal à 2.
Prouver que si une famille $v_1, \ldots, v_n \in E$ de n vecteurs d'un espace vectoriel E est libre alors pour $2 \leq k \leq n$ on a $v_k \neq v_1$.

4) L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel.

a) Soit $u_1 = (\sqrt{3}, -1, 2), u_2 = (1, \sqrt{3}, -2), u_3 = (-(1+\sqrt{3}), 1-\sqrt{3}, 0)$ et $w_1 = (0, -1, 1), w_2 = (1, 0, -1), w_3 = (-1, 1, 0)$.

a1) Déterminer une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ du plan $\mathbf{P}$ passant par les trois points w_1, w_2, w_3. [*c.a d.* déterminer quatre réels a, b, c, d tels qu'un point $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ est dans $\mathbf{P}$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$]

a2) Calculer les somme $\sum_{k=1}^3 u_k, \sum_{k=1}^3 w_k$, pour $1 \leq i, j \leq 3$ les produits scalaires $< u_i, u_j >, < w_i, w_j >$ et pour $1 \leq k \leq 3$ les normes $\|u_k\|, \|w_k\|$.
En déduire la valeur des angles $\widehat{u_1, u_2}$ et $\widehat{w_1, w_2}$.

Soit $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^3$ trois vecteurs tels que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

b) Prouver que le rang de la famille v_1, v_2, v_3 est au plus 2.
Donner des exemples de familles vérifiant les hypothèses de b) et de rang $0, 1$ et 2.

c) On suppose de plus $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = L$.
Prouver que la famille v_1, v_2, v_3 n'est pas de rang 1.

d) Exprimer le produits scalaire $< v_1, v_2 >$ en fonction de $\|v_1\|^2, < v_1, v_3 >$.
puis le produits scalaire $< v_2, v_3 >$ en fonction de $\|v_2\|^2, < v_2, v_1 >$.

e) On suppose les hypothèses de c). Déduire de d) les valeurs des trois produits scalaires $< v_1, v_2 >, < v_2, v_3 >, < v_3, v_1 >$ en fonction de L,
puis, si $L \neq 0$, les angles $\widehat{v_1, v_2}, \widehat{v_2, v_3}, \widehat{v_3, v_1} \in [0, \pi]$.

Devoir 6

5) Soit $v = (a, b) \neq (0, 0) \in \mathbf{R}^2$ un vecteur non nul du plan. a) Prouver que

a1) l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(u) =< u, v >$ qui a $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ associe son produit scalaire $< u, v >= xa + yb$ avec v est linéaire. Quel est son noyau?

a2) l'application $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, g(u) = \det(u, v)$ qui a $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ associe le déterminant $\det(u, v) = \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ de u et v est linéaire. Quel est son noyau?

b) Déterminer le noyau de $h = (f, g) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, h(u) = (f(u), g(u))$.

c) Il y a t il un vecteur $u \in \mathbf{R}^2$ tel que $h(u) = v$?

6) Soit E le sous-espace de $\mathbf{R}^5$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$
$v_2 = (1, -1, 1, 2, 1), v_3 = (3, -1, 3, 5, 3), v_4 = (1, 1, -1, 1, 1), v_5 = (2, 0, 0, 3, 2)$,
$v_6 = (3, 3, 1, 3, 3), v_7 = (3, 1, 1, 4, 3)$ et $w = (3, 1, 1, 4, 3)$.

a) Déterminer une base de E ainsi que les coordonnées dans cette base des vecteurs $v_1, \ldots, v_7$.

b) En déduire les solutions $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbf{R}^7$ du système

$$\sum_{k=1}^{7} x_k \cdot v_k = w$$

7) Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Après avoir rappelé les définitions de l'image $\mathrm{Im}(f)$ et du noyau $\ker(f)$ de f, prouver que E est de dimension finie si et seulement si $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont tous deux de dimension finie.