Master 1 Mathématiques, MAT414 Université Joseph Fourier

2008-2009

Devoir à la maison (à rendre le lundi 20 avril).

Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Exercice 1. *Variance conditionnelle.*

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle variance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ la variable aléatoire

$$\mathrm{var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2 \,|\, \mathcal{G}\big] .$$

1. Montrer que $\mathrm{var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2$ presque sûrement.
2. Montrer que
$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\big(\mathrm{var}(X|\mathcal{G})\big) + \mathrm{var}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)$$
($\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(X|\{\Omega, \emptyset\})$ désigne la variance usuelle).
3. En déduire que
$$\mathrm{var}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big) \leq \mathrm{var}(X) .$$
Que peut-on dire de X si cette inégalité est une égalité ?
Indication : on pourra utiliser un résultat de l'exercice 10 de la feuille de TD 1.

Exercice 2. *Inégalité de Tchebychev.*

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P}[\,|X| \geq a \,|\, \mathcal{G}\,] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]}{a^2} \quad \text{p.s.}$$

où l'on a noté $\mathbb{P}[\,|X| \geq a \,|\, \mathcal{G}\,] = \mathbb{E}[1_{\{|X| \geq a\}}|\mathcal{G}]$.

Exercice 3. *Espérance conditionnelle nulle d'une variable aléatoire positive.*

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[0, \infty]$. Montrer que pour presque tout $\omega \in \Omega$,

1. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = 0$
2. $X(\omega) = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \infty$.

Exercice 4. *Temps d'arrêt (1).*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique à temps discret à valeurs dans $\mathbb{R}$, défini sur son espace probabilisé canonique $(\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_\infty, \mathbb{P})$. Soit $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour toute variable aléatoire τ sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_\infty, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit $\theta_\tau : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par (cf. cours)

$$\theta_\tau : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+\tau((x_i)_{i\in\mathbb{N}})})_{n\in\mathbb{N}} .$$

Montrer que, si S et T sont deux temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$, alors les variables aléatoires suivantes sont également des temps d'arrêt de la même filtration :

1. $\min\{S, T\}$, $\max\{S, T\}$, et
2. $T + S \circ \theta_T$.

Exercice 5. *Temps d'arrêt (2).*

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^\star)$ (tribu de toutes les parties de $\mathbb{N}^\star$). Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la filtration de $(\Omega, \mathcal{F})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$\mathcal{F}_n = \sigma\big(\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\big)$$

(tribu engendrée par les n singletons $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$ de $\mathbb{N}^\star$). Montrer que la variable aléatoire $T : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ tel que pour tout $\omega \in \mathbb{N}^\star$,

$$T(\omega) = k \quad \text{si } \omega > k \text{ et } \quad T(\omega) \geq \omega \quad \text{si } \omega \leq k.$$

Indication (⇒) : montrer que parmi toutes les parties $\{T = n\} \subset \mathbb{N}^\star$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, au plus une seule est une partie infinie.

Exercice 6. *Problème.*

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit qu'une fonction $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{N}$ est *croissante* si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$,

$$x_i \leq y_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)\ .$$

1. Soient $(X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})$ et $(X_1^{(q)}, \ldots, X_n^{(q)})$ des n-uplets de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli (à valeurs dans $\{0,1\}$) de paramètres $p = \mathbb{P}[X_i^{(p)} = 1]$ et $q = \mathbb{P}[X_i^{(q)} = 1]$, respectivement. Montrer que, pour toute fonction croissante $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$,

$$p \leq q \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[f(X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})] \leq \mathbb{E}[f(X_1^{(q)}, \ldots, X_n^{(q)})]\ . \tag{1}$$

   Indication : considérer un n-uplet $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p/q, tel que $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(X_1^{(q)}, \ldots, X_n^{(q)})$ sont indépendants. Définir $\widetilde{X}_i^{(p)} = Y_i X_i^{(q)}$ pour $i = 1, \ldots, n$, et montrer que les $\widetilde{X}_i^{(p)}$ sont indépendantes, ont même loi de Bernoulli de paramètre p et satisfont à l'inégalité (1).

2. On suppose $n = 1$. Soient f et g deux fonctions croissantes $\{0,1\} \to \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0,1]$. Montrer que $\operatorname{cov}(f(X), g(X)) \geq 0$.

   Indication : considérer une nouvelle variable aléatoire $\widetilde{X}$ indépendante de X et de même loi que X et prouver que $\mathbb{E}[(f(X) - f(\widetilde{X}))(g(X) - g(\widetilde{X})] \geq 0$.

3. Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier quelconque. Soient f et g deux fonctions croissantes $\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Montrer par récurrence que

$$\operatorname{cov}(f(X), g(X)) \geq 0\ . \tag{2}$$

   Indication : conditionner par rapport à $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ puis utiliser l'hypothèse de récurrence.