Corrigé du devoir à la maison du 20 avril 2009

Exercice 1.

1. Puisque $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$-mesurable, on a $\mathbb{E}(X\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,|\,\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2\,|\,\mathcal{G})$. Par linéarité de l'espérance conditionnelle, il vient
$$\operatorname{var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\big(X^2 - 2X\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2\,|\,\mathcal{G}\big) = \mathbb{E}\big(X^2|\mathcal{G}\big) - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2 \;\geq 0 \;\text{ p.s.} \tag{1}$$

2. En utilisant (1) et l'égalité $\mathbb{E}(\mathbb{E}[X^n|\mathcal{G}]) = \mathbb{E}(X^n)$ pour $n = 1, 2$, on obtient
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\operatorname{var}(X|\mathcal{G})\big) + \operatorname{var}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2\big) + \mathbb{E}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2\big) - \big(\mathbb{E}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)\big)^2 \\ &= \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \;=\; \operatorname{var}(X)\;. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Comme $\operatorname{var}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ p.s., il découle de (2) que $\operatorname{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \operatorname{var}(X)$. Supposons que l'on ait égalité, $\operatorname{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) = \operatorname{var}(X)$. Alors (2) entraîne $\mathbb{E}\big(\operatorname{var}(X|\mathcal{G})\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}\big]\big) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2\big) = 0$. Donc $\operatorname{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) = \operatorname{var}(X)$ ssi $X = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ p.s., c'est-à-dire, ssi X est $\mathcal{G}$-mesurable. (Remarque : on peut utiliser ce résultat et (1) pour démontrer le résultat (3) de l'exercice 10 de la feuille de TD 1, ou bien inversement utiliser le résultat établi en TD ainsi que (1) et (2) pour démontrer que $\operatorname{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) = \operatorname{var}(X)$ ssi X est $\mathcal{G}$-mesurable).

Exercice 2.

Posons $Z = a^{-2}\,\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[1_{\{|X|\geq a\}}|\mathcal{G}]$. Soit $G \in \mathcal{G}$. Vu la définition de l'espérance conditionnelle,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[1_{\{|X|\geq a\}}|\mathcal{G}]\,1_G\big] &= \int_{\{|X|\geq a\}\cap G} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \quad\leq\quad \int_{\{|X|\geq a\}\cap G} \frac{X(\omega)^2}{a^2}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \int_G \frac{X(\omega)^2}{a^2}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \frac{\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\,1_G\big]}{a^2}\;.\end{aligned}$$

Cela prouve que $\mathbb{E}[Z1_G] \geq 0$ pour tout $G \in \mathcal{G}$. Appliquons cette dernière inégalité à l'ensemble $G = \{Z \leq 0\}$, qui est bien dans $\mathcal{G}$ car Z est $\mathcal{G}$-mesurable. Comme $Z1_{\{Z\leq 0\}}$ est négatif et a une espérance positive, on a $\mathbb{E}[Z1_{\{Z\leq 0\}}] = 0$, d'où $Z1_{\{Z\leq 0\}} = 0$ presque sûrement. Par conséquent, Z est presque sûrement positive. Cela démontre l'inégalité de Tchebychev conditionnelle
$$\mathbb{P}[\,|X| \geq a\,|\,\mathcal{G}\,] = \mathbb{E}[1_{\{|X|\geq a\}}|\mathcal{G}] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]}{a^2} \;\text{ p.s.} \tag{3}$$

Exercice 3.

On pose $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

1. Par définition de l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}[X1_{\{Y=0\}}] = \mathbb{E}[Y1_{\{Y=0\}}] = 0$ car $\{Y = 0\} \in \mathcal{G}$. Mais X et $X1_{\{Y=0\}}$ sont des variables aléatoires positives. On peut donc en conclure que $X1_{\{Y=0\}} = 0$ p.s., c'est-à-dire, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = 0 \Rightarrow X(\omega) = 0$. Une autre façon d'énoncer ce résultat est : il existe un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$ de mesure $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ tel que $\{Y = 0\} \cap \Omega_1 \subset \{X = 0\} \cap \Omega_1$.

2. Puisque $\{Y < \infty\} \in \mathcal{G}$, on a pour tout $s \in]0, 1[$
$$\widetilde{g}_X(s) = \mathbb{E}[s^X\,1_{\{Y<\infty\}}] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[s^X|\mathcal{G}]\,1_{\{Y<\infty\}}\big] \;\geq\; \mathbb{E}\big[s^Y\,1_{\{Y<\infty\}}\big]\;, \tag{4}$$
où la dernière inégalité découle de l'inégalité de Jensen et de la convexité de $x \mapsto s^x$. Faisons tendre s vers $1-$ dans (4). Le membre de droite de l'inégalité tend vers $\widetilde{g}_X(1) = \mathbb{E}[1_{\{Y<\infty\}}]$ en vertu

du théorème de la convergence dominée (ou convergence monotone). Mais $\widetilde{g}_X(s) \leq \widetilde{g}_X(1)$ pour tout $s \in]0,1[$, d'où $\widetilde{g}_X(s) \to \widetilde{g}_X(1)$ quand $s \to 1-$. Par une nouvelle application du théorème de la convergence dominée, $\widetilde{g}_X(1) - \widetilde{g}_X(s) = \mathbb{E}[(1-s^X)1_{\{Y<\infty\}}]$ tend vers $\mathbb{E}[1_{\{X=\infty\}}\, 1_{\{Y<\infty\}}]$, d'où $\mathbb{E}[1_{\{X=\infty\}}\, 1_{\{Y<\infty\}}] = 0$ par unicité de la limite. Ainsi, $1_{\{X=\infty\}}\, 1_{\{Y<\infty\}} = 0$ p.s., c'est-à-dire, pour presque tout $\omega \in \Omega$ on a $X(\omega) = \infty \;\Rightarrow\; Y(\omega) = \infty$.

Exercice 4.

1. Puisque S et T sont des temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\big\{\min\{S,T\} = n\big\} = \Big(\underbrace{\{S=n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{{}^c\{T<n\}}_{\in\mathcal{F}_n}\Big) \cup \Big(\underbrace{{}^c\{S<n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T=n\}}_{\in\mathcal{F}_n}\Big)$$
(car $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$ si $n \geq 1$), d'où $\big\{\min\{S,T\} = n\big\} \in \mathcal{F}_n$. Cela montre que $\min\{S,T\}$ est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La preuve est analogue pour $\max\{S,T\}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big\{T + S\circ\theta_T = n\big\} = \bigcup_{k=0}^{n} \Big(\underbrace{\{T=k\}}_{\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n} \cap \{S\circ\theta_k = n-k\}\Big)$. Or si $k \in \{0,\ldots,n\}$ alors $\{S = n-k\} \in \mathcal{F}_{n-k}$. Comme $\theta_k^{-1}(\mathcal{F}_{n-k}) \subset \mathcal{F}_n$, on en déduit que
$$\{S\circ\theta_k = n-k\} = \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ;\ \theta_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \{S = n-k\}\ \big\} = \theta_k^{-1}(\{S = n-k\}) \in \mathcal{F}_n\ .$$
Ainsi, $T + S\circ\theta_T$ est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Notons tout d'abord que $A \in \mathcal{F}_n = \sigma(\{1\},\ldots,\{n\}) \;\Leftrightarrow\; A \subset \{1,\ldots,n\}$ ou ${}^cA \subset \{1,\ldots,n\}$ $\quad(*)$.

$\Rightarrow$ Soit T un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Alors $\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On distingue 2 cas.
(1) S'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que ${}^c\{T=k\} \subset \{1,\ldots,k\}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star \setminus \{k\}$, $\{T=n\} \subset {}^c\{T=k\}$ est une partie finie de $\Omega = \mathbb{N}^\star$. Puisque de plus $\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$, il s'ensuit d'après $(*)$ que $\{T=n\} \subset \{1,\ldots,n\}$. Ainsi, si $\omega \in \mathbb{N}^\star$ vérifie $T(\omega) = n \neq k$ alors $n \geq \omega$. Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^\star \setminus \{k\}$, il en découle que si $T(\omega) \neq k$ alors $T(\omega) \geq \omega$. Cette inégalité est bien sûr aussi vérifiée si $T(\omega) = k$ et $\omega \in \{1,\ldots,k\}$. Finalement, on déduit de ${}^c\{T=k\} \subset \{1,\ldots,k\}$ que $\{T=k\} \supset \{k+1, k+2, \ldots\}$ et donc $T(\omega) = k$ pour tout $\omega > k$. On a prouvé que
$$T(\omega) = k \quad \text{si } \omega > k \text{ et } \quad T(\omega) \geq \omega \quad \text{si } \omega \leq k. \tag{5}$$
(2) S'il n'existe pas d'entier fini k tel que ${}^c\{T=k\} \subset \{1,\ldots,k\}$, alors toutes les parties $\{T=n\} \subset \mathbb{N}^\star$ sont finies. En vertu de $(*)$ et de $\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$, il vient $\{T=n\} \subset \{1,\ldots,n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Par le même argument que précédemment, on en déduit que l'affirmation (5) est vraie avec $k = \infty$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ satisfaisant (5). Soit $n \in \mathbb{N}^\star \setminus \{k\}$. Alors $\{T=n\} = \{\omega \in \mathbb{N}^\star; T(\omega) = n \geq \omega\} \subset \{1,\ldots,n\}$. Donc $\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$ en vertu de $(*)$. De plus, si k est un entier fini on a ${}^c\{T=k\} \subset \{1,\ldots,k\}$. Il s'ensuit que ${}^c\{T=k\} \in \mathcal{F}_k$ et $\{T=k\} \in \mathcal{F}_k$. Par conséquent, T est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 6.

1. Soit $0 \leq p < q \leq 1$. Soit $(Y_1,\ldots,Y_n)$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}[Y_i = 1] = p/q$ tel que $(Y_1,\ldots,Y_n)$ et $(X_1^{(q)},\ldots,X_n^{(q)})$ sont indépendants. Le vecteur aléatoire $(Y_1,\ldots,Y_n)$ existe car $p/q \in [0,1]$. Pour tout $i = 1,\ldots,n$, on considère la variable aléatoire
$$\widetilde{X}_i^{(p)} = Y_i X_i^{(q)}$$
à valeurs dans $\{0,1\}$. On remarque que $(\widetilde{X}_1^{(p)},\ldots,\widetilde{X}_n^{(p)})$ est un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi (en effet, c'est vrai pour $(Y_1,\ldots,Y_n)$ et pour $(X_1^{(q)},\ldots,X_n^{(q)})$ et de

plus les vecteurs aléatoires $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(X_1^{(q)}, \ldots, X_n^{(q)})$ sont indépendants). Étant donné que les variables aléatoires $X_i^{(q)}$ et Y_i sont indépendantes, on a pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}\big[\widetilde{X}_i^{(p)} = 1\big] = \mathbb{P}\big[\{Y_i = 1\} \cap \{X_i^{(q)} = 1\}\big] = \mathbb{P}\big[Y_i = 1\big] \times \mathbb{P}\big[X_i^{(q)} = 1\big] = \frac{p}{q} \times q = p\,.$$

Donc les $\widetilde{X}_i^{(p)}$ sont distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre p. Mais $\widetilde{X}_i^{(p)} \leq X_i^{(q)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ (car $Y_i \in \{0,1\}$). Puisque f est croissante, cela implique

$$f(\widetilde{X}_1^{(p)}, \ldots, \widetilde{X}_n^{(p)}) \;\leq\; f(X_1^{(q)}, \ldots, X_n^{(q)})\,. \tag{6}$$

Soit $(X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Alors les variables aléatoires $f(X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})$ et $f(\widetilde{X}_1^{(p)}, \ldots, \widetilde{X}_n^{(p)})$ ont même loi (car les vecteurs $(X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})$ et $(\widetilde{X}_1^{(p)}, \ldots, \widetilde{X}_n^{(p)})$ ont même loi) et ont donc des espérances égales. En prenant l'espérance de l'inégalité (6), on obtient :

$$\mathbb{E}[f(X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})] = \mathbb{E}[f(\widetilde{X}_1^{(p)}, \ldots, \widetilde{X}_n^{(p)})] \;\leq\; \mathbb{E}[f(X_1^{(q)}, \ldots, X_n^{(q)})]\,. \tag{7}$$

Notons que l'on n'a pas supposé que $(X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})$ et $(X_1^{(q)}, \ldots, X_n^{(q)})$ sont indépendants.

2. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et $\widetilde{X}$ une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X. Si f et $g : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ sont croissantes, alors

$$\big(f(X) - f(\widetilde{X})\big)\big(g(X) - g(\widetilde{X})\big) \;\geq\; 0 \tag{8}$$

(on vérifie successivement cette inégalité pour $X \geq \widetilde{X}$ puis pour $X \leq \widetilde{X}$). Comme $f(X)$ et $g(\widetilde{X})$ sont indépendantes, on en déduit que $\mathbb{E}[f(X)g(\widetilde{X})] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(\widetilde{X})]$; de même, $\mathbb{E}[f(\widetilde{X})g(X)] = \mathbb{E}[f(\widetilde{X})]\mathbb{E}[g(X)]$. Puisque $f(X)$ et $f(\widetilde{X})$ ont même loi et $g(X)$ et $g(\widetilde{X})$ ont même loi, on aussi

$$\mathbb{E}[g(\widetilde{X})] = \mathbb{E}[g(X)] \quad , \quad \mathbb{E}[f(\widetilde{X})] = \mathbb{E}[f(X)] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[f(\widetilde{X})g(\widetilde{X})] = \mathbb{E}[f(X)g(X)]\,.$$

L'espérance du membre de gauche de (8) vaut donc

$$\mathbb{E}\big[\big(f(X) - f(\widetilde{X})\big)\big(g(X) - g(\widetilde{X})\big)\big] = \mathbb{E}\big[f(X)g(X)\big] - \mathbb{E}\big[f(X)\big]\mathbb{E}\big[g(X)\big] = \mathrm{cov}\big(f(X), g(X)\big)\,.$$

On trouve ainsi d'après (8)

$$\mathrm{cov}\big(f(X), g(X)\big) \geq 0\,. \tag{9}$$

3. Plus généralement, on va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ que

$$\mathrm{cov}\big(f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)\big) \;\geq\; 0 \tag{10}$$

pour toutes fonctions f et g croissantes $\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ et tout n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Remarque : *L'inégalité (10) est aussi vraie sous certaines conditions pour $n = \infty$; il s'agit de l'inégalité FKG (Fortuin, Kasteleyn et Ginibre) qui est très utile dans la théorie de la percolation.*

L'inégalité (10) est vraie pour $n = 1$ d'après la question précédente. Supposons qu'elle soit vraie pour $n - 1$, $n \geq 2$, et montrons qu'elle est vraie pour n. Soit f_n et g_n deux fonctions croissantes $\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On introduit la notation $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_{n-1})$ et on pose, pour tout $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$,

$$f_{n-1}(\underline{x}) = \mathbb{E}\big[f_n(X) | \underline{X} = \underline{x}\big] = \mathbb{E}\big[f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)\big]\,.$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé l'indépendance de X_n et de $\underline{X}$ ainsi que le résultat (5) de l'exercice 10 de la feuille de TD 1. Remarquons que f_{n-1} est une fonction croissante $\{0,1\}^{n-1} \to \mathbb{R}$. On définit de manière identique la fonction $g_{n-1} : \{0,1\}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Il découle de la question précédente que

$$\mathbb{E}[f_n(X)g_n(X)|\underline{X} = \underline{x}] \;\geq\; f_{n-1}(\underline{x})g_{n-1}(\underline{x}) \; . \tag{11}$$

(en effet, si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont fixés, les fonctions d'une variable $x_n \in \{0,1\} \mapsto f_n(x_1, \ldots, x_n)$ et $x_n \in \{0,1\} \mapsto g_n(x_1, \ldots, x_n)$ sont bien croissantes). L'inégalité (11) étant vraie pour tout $\underline{x} \in \{0,1\}^{n-1}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\Big[f_n(X)g_n(X)\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[f_n(X)g_n(X)|\underline{X}\big]\Big] \;\geq\; \mathbb{E}\Big[f_{n-1}(\underline{X})g_{n-1}(\underline{X})\Big] \; . \tag{12}$$

On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence et la croissance des fonctions f_{n-1} et g_{n-1} pour en conclure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[f_{n-1}(\underline{X})g_{n-1}(\underline{X})\Big] \;&\geq\; \mathbb{E}\big[f_{n-1}(\underline{X})\big]\mathbb{E}\big[f_{n-1}(\underline{X})\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[f_n|\underline{X}]\big]\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[g_n|\underline{X}]\big] \\ &=\; \mathbb{E}\big[f_n(X)\big]\mathbb{E}\big[g_n(X)\big] \; . \end{aligned} \tag{13}$$

Il découle de (12) et (13) que l'inégalité (10) est satisfaite pour n. D'où le résultat.