Master 1 Mathématiques, MAT414 Université Joseph Fourier
2008-2009

Corrigé du devoir surveillé du 27 avril 2009

Exercice 1.

1. $\mathbb{Q} : A \in \mathcal{F} \mapsto \mathbb{E}[Y\, 1_A]$ définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ car :
(i) pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) \geq 0$ (car par hypothèse $Y \geq 0$) et $\mathbb{Q}(\emptyset) = 0$;
(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles disjoints de $\mathcal{F}$, alors
$$\mathbb{Q}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \mathbb{E}\Big[Y \sum_{n=0}^{\infty} 1_{A_n}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\big[Y 1_{A_n}\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}(A_n)$$
en vertu du théorème de la convergence monotone;
(iii) $\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}[Y\, 1_\Omega] = \mathbb{E}[Y] = 1$ par hypothèse.
Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement de probabilité $\mathbb{P}(A) = 0$. Alors $1_A(\omega) = 0$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$. Or Y est intégrable, d'où $Y < \infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. Par conséquent, $Y(\omega) 1_A(\omega) = 0$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, d'où $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Y 1_A] = 0$. Ceci montre que si $A \in \mathcal{F}$ vérifie $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $\mathbb{Q}(A) = 0$. Autrement dit, la probabilité $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$.

2. On note $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace des variables aléatoires réelles $\mathbb{P}$-presque sûrement bornées sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X \geq 0$. Il existe une suite croisante de fonctions étagées $X_n : \omega \to \mathbb{R}_+$ telle que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$. Or, par définition de $\mathbb{Q}$,
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_n] = \sum_{k=0}^{K_n} x_{k,n}\, \mathbb{Q}\big(A_{k,n}\big) = \mathbb{E}[Y X_n] \quad \text{avec } \; X_n = \sum_{k=0}^{K_n} x_{k,n} 1_{A_{k,n}} \tag{1}$$
(ici $K_n \in \mathbb{N}$, $x_{k,n} \geq 0$ et $A_{k,n} \in \mathcal{F}$ pour tout $k = 0, \ldots, K_n$). Par construction de l'intégrale pour la mesure $\mathbb{Q}$ et en vertu de (1) et du théorème de la convergence monotone, on obtient
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y X_n] = \mathbb{E}[Y X]\ .$$
Si $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ n'est pas positive, on écrit $X = X_+ - X_-$ avec $X_\pm \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X_\pm \geq 0$. Alors $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_+] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_-] = \mathbb{E}[XY]$.

3. Soit $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose $a = \|X\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \mathbb{P}-\mathrm{essup}_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|$. La variable aléatoire $Z = \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]/\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement bornée. En effet,
$$\big|Z\big| \leq \frac{\mathbb{E}[\,|X|\,Y|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]} \leq \frac{\mathbb{E}[aY|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]} = a \quad \mathbb{P}\text{-presque-sûrement.}$$
Puisque $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, il s'ensuit que Z est $\mathbb{Q}$-presque sûrement bornée. En particulier, Z est intégrable pour la mesure $\mathbb{Q}$. De plus, Z est $\mathcal{G}$-mesurable car $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ le sont. Enfin, pour tout $A \in \mathcal{G}$, $Z\, 1_A \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est $\mathcal{G}$-mesurable et donc, d'après la question 2 et les propriétés générales des espérances conditionnelles,
$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[Z\, 1_A\big] &= \mathbb{E}\big[Z\, 1_A\, Y\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[Z\, 1_A\, Y|\mathcal{G}\big]\big] = \mathbb{E}\big[Z\, 1_A\, \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]\, 1_A\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY 1_A|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}\big[XY\, 1_A\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[X\, 1_A\big]\ . \end{aligned}$$
Par unicité (modulo un ensemble de mesure nulle) de l'espérance conditionnelle, il vient
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{G}] = Z = \frac{\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]} \quad \mathbb{Q}\text{-presque sûrement.}$$

Exercice 2.

(1) ⇒ (2). Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, alors $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf. le cours). Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < m$. Puisque $\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n^X] = X_n$, il vient

$$\mathrm{cov}(X_n, X_m) + \mu^2 = \mathbb{E}\big[X_n X_m\big] = \mathbb{E}\big[X_n\, \mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n^X]\big] = \mathbb{E}\big[X_n^2\big] = \mathrm{var}(X_n) + \mu^2 \,. \tag{2}$$

Par symétrie $n \leftrightarrow m$, $\mathrm{cov}(X_n, X_m) = \sigma^2_{\min\{n,m\}}$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(X_n^2)$.

(2) ⇒ (3). On définit $V_0 = X_0 - \mu$ et $V_n = X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Il est clair que

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} V_k + \mathbb{E}[X_0] \,. \tag{3}$$

$(V_0, \ldots, V_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien car il s'obtient à partir du vecteur aléatoire gaussien $(X_0, \ldots, X_n)$ par une transformation linéaire suivie d'une translation par un vecteur déterministe,

$$(V_0, \ldots, V_n) = (X_0, \ldots, X_n) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix} - (\mu, 0, \ldots, 0) \,.$$

Or, comme $(V_0, \ldots, V_n)$ est gaussien, $(V_0, \ldots, V_n)$ est indépendant *ssi* $\mathrm{cov}(V_k, V_m) = 0$ pour tout $k, m = 0, \ldots, n$, $k < m$. C'est le cas ici car d'après (2),

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(V_k, V_m) &= \mathrm{cov}(X_k - X_{k-1}, X_m - X_{m-1}) \\ &= \underbrace{\mathrm{cov}(X_k, X_m)}_{=\sigma_k^2} - \underbrace{\mathrm{cov}(X_{k-1}, X_m)}_{=\sigma_{k-1}^2} - \underbrace{\mathrm{cov}(X_k, X_{m-1})}_{=\sigma_k^2} + \underbrace{\mathrm{cov}(X_{k-1}, X_{m-1})}_{=\sigma_{k-1}^2} = 0 \end{aligned}$$

où l'on a posé $X_{-1} = \mu$. Cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne $\mathbb{E}[V_n] = \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_{n-1}] = \mu - \mu = 0$ et de variances $\mathrm{var}(V_n) = \mathrm{var}(X_n) - 2\mathrm{cov}(X_n, X_{n-1}) + \mathrm{var}(X_{n-1}) = \sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2$ si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{var}(V_n) = \sigma_0^2$ si $n = 0$. Remarquons que l'on en déduit que $\mathrm{var}(X_n) \geq \mathrm{var}(X_{n-1})$ puisque $\mathrm{var}(V_n) \geq 0$, cela est aussi une conséquence de l'affirmation (1) (et de l'inégalité de Jensen).

(3) ⇒ (1). Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $\mathcal{F}_n^X$, X_n est $\mathcal{F}_n^X$-mesurable et est intégrable comme somme de variables aléatoires intégrables (les V_n ont des lois gaussiennes et sont donc bien intégrables). Il découle de (3) que

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n^X] = \mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = \mathbb{E}[V_{n+1}] = 0$$

car V_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n^X = \sigma(V_0, \ldots, V_n)$ et c'est une variable aléatoire centrée. Cela montre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.

Exercice 3.

1. La variable aléatoire $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^\star; X_{n-1} \in A, X_n \in B\}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$. Il s'agit d'un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\{T = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0^X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\{T > n\} = \bigcap_{j=1}^{n} \Big({}^c\underbrace{\{X_{j-1} \in A\}}_{\in \mathcal{F}_{j-1}^X \subset \mathcal{F}_n^X} \cup {}^c\underbrace{\{X_j \in B\}}_{\in \mathcal{F}_j^X \subset \mathcal{F}_n^X} \Big) \;\in\; \mathcal{F}_n^X \,. \tag{4}$$

2. Attention: bien que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes, les événements $\{X_{j-1} \in A, X_j \in B\}$ et $\{X_{i-1} \in A, X_i \in B\}$ ne sont indépendants que si $|j - i| \geq 2$. Pour tirer avantage de cette indépendance, on sépare les valeurs paires et impaires de j ($j = 2k$ ou

$j = 2k-1$) dans l'intersection (4) définissant $\{T > n\}$. Pour $n = 2m$, ce dernier événement a pour probabilité

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T > 2m] &= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{k=1}^{m}\Big(\Big\{(X_{2k-1}, X_{2k}) \notin A \times B\Big\} \cap \Big\{(X_{2k-2}, X_{2k-1}) \notin A \times B\Big\}\Big)\Big] \\
&\leq \mathbb{P}\Big[\bigcap_{k=1}^{m}\Big\{(X_{2k-1}, X_{2k}) \notin A \times B\Big\}\Big] = \prod_{k=1}^{m}\mathbb{P}\Big[(X_{2k-1}, X_{2k}) \notin A \times B\Big] \\
&= \prod_{k=1}^{m}\Big(1 - \mathbb{P}\big[X_{2k-1} \in A, X_{2k} \in B\big]\Big) = \big(1 - pq\big)^m
\end{aligned}$$

d'après l'indépendance mentionnée plus haut et l'indépendance de $\{X_{2k-1} \in A\}$ et $\{X_{2k} \in B\}$. Il en découle au vu de l'hypothèse $pq > 0$ et de $\mathbb{P}[T > 2m+1] \leq \mathbb{P}[T > 2m]$ que

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}[T > n] \;\leq\; 2\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}[T > 2m] = 2\sum_{m=0}^{\infty}(1-pq)^m < \infty\,.$$

Par conséquent, T est intégrable (rappelons que T est positive).

3. Les variables aléatoires

$$M_0 = \frac{1}{p}\,1_{\{X_0 \in A\}} \qquad \text{et} \qquad M_n = \frac{1}{p}\,1_{\{X_n \in A\}} + \frac{1}{pq}\sum_{j=1}^{n}1_{\{X_{j-1} \in A, X_j \in B\}} - n$$

sont respectivement $\mathcal{F}_0^X$ et $\mathcal{F}_n^X$-mesurables et intégrables. En effet, ce sont des sommes finies de variables aléatoires $\mathcal{F}_0^X$ et $\mathcal{F}_n^X$-mesurables et intégrables. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Il découle de l'indépendance de X_{n+1} et $\mathcal{F}_n^X$ et de la $\mathcal{F}_n^X$-mesurabilité de $1_{\{X_n \in A\}}$ que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n^X] &= \frac{1}{p}\,\mathbb{E}\big[1_{\{X_{n+1} \in A\}} - 1_{\{X_n \in A\}}|\mathcal{F}_n^X\big] + \frac{1}{pq}\,\mathbb{E}\big[1_{\{X_n \in A, X_{n+1} \in B\}}|\mathcal{F}_n^X\big] - 1 \\
&= \frac{1}{p}\,\mathbb{E}\big[1_{\{X_{n+1} \in A\}}\big] - 1_{\{X_n \in A\}} + \frac{1}{pq}\,1_{\{X_n \in A\}}\,\mathbb{E}\big[1_{\{X_{n+1} \in B\}}\big] - 1 \\
&= \frac{p}{p} - 1_{\{X_n \in A\}} + \frac{1}{pq}\,1_{\{X_n \in A\}}\,q - 1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Cela prouve que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$-martingale.

4. Par définition de T, $1_{\{X_{j-1} \in A, X_j \in B\}}$ vaut 0 pour $j \in \{1, \ldots, T-1\}$ et vaut 1 pour $j = T$. En prenant également en compte le fait que $T \geq 1$ et $X_T \in B$, on obtient

$$M_T + T = \frac{1}{p}\,1_{\{X_T \in A\}} + \frac{1}{pq} = \begin{cases} \dfrac{1}{pq} & \text{si } A \cap B = \emptyset \\ \dfrac{q+1}{pq} & \text{si } B \subset A. \end{cases} \tag{5}$$

5. On écrit $n \wedge T = \min\{n, T\}$. Comme $M_{n \wedge T(\omega)}(\omega) \to M_{T(\omega)}(\omega)$ quand $n \to \infty$ pour presque tout $\omega \in \Omega$ (car T est intégrable et donc p.s. fini d'après la question 2) et $M_{n \wedge T}$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $M_{n \wedge T} \to M_T$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ssi* $\{M_{n \wedge T}; n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable, c'est-à-dire, *ssi*

$$h(a) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\mathbb{E}\big[|M_{n \wedge T}|\,1_{\{|M_{n \wedge T}| \geq a\}}\big] \to 0 \quad \text{quand } a \to \infty \tag{6}$$

(cf. la proposition 3 de l'appendice sur l'uniforme intégrabilité du polycopié de cours). Soit a un réel tel que $a \geq (1+q)/(pq)$. Puisque $T < \infty$ p.s., on peut écrire

$$h(a) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\left\{\sum_{m=0}^{n}\mathbb{E}\big[|M_T|\,1_{\{|M_T| \geq a, T = m\}}\big] + \sum_{m=n+1}^{\infty}\mathbb{E}\big[|M_n|\,1_{\{|M_n| \geq a, T = m\}}\big]\right\}\,.$$

Mais $-n \leq M_n \leq 1/p + n/(pq) - n$, d'où (rappelons que $pq \leq 1$)

$$|M_n| \leq \frac{n+q}{pq} \quad , \quad n \in \mathbb{N} . \tag{7}$$

Par conséquent,

$$h(a) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+q}{pq} \, \mathbb{E}\big[1_{\{|M_T| \geq a, T=m\}}\big] + \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{n+q}{pq} \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{E}\big[1_{\{|M_n| \geq a, T=m\}}\big] \right\} . \tag{8}$$

En vertu de la question 4, $|M_T| \geq a$ entraîne $-T \leq M_T = -T + 1_{\{X_n \in A\}}/p + 1/(pq) \leq -a$ (en effet, pour le choix $a \geq (1+q)/(pq)$ fait ci-dessus on a $M_T < a$). Donc $\{|M_T| \geq a\} \subset \{T > a\}$. On en déduit en faisant appel à la question 2 que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} (m+q)\mathbb{E}\big[1_{\{|M_T| \geq a, T=m\}}\big] \ &\leq \ \sum_{m>a} (m+q)\mathbb{E}\big[1_{\{T=m\}}\big] \\
&\leq \sum_{l>(a-1)/2} \Big((2l+1+q)\mathbb{P}[T=2l+1] + (2l+2+q)\mathbb{P}[T=2l+2] \Big) \\
&\leq \sum_{l>(a-1)/2} (2l+2+q)(1-pq)^l \ \to \ 0 \quad \text{quand } a \to \infty.
\end{aligned}$$

Il reste à majorer le second terme dans le membre de droite de (8). Pour cela, on peut utiliser l'inégalité de Markov $\mathbb{E}[1_{\{|M_n| \geq a\}} \, 1_{\{T=m\}}] \leq \mathbb{E}[|M_n| \, 1_{\{T=m\}}]/a$. Au vu de (7), cela donne

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (n+q) \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{E}\big[1_{\{|M_n| \geq a, T=m\}}\big] \right\} \ &\leq \ \frac{1}{apq} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (n+q)^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[1_{\{T=m\}}] \right\} \\
\leq \frac{1}{apq} \sup_{n\in\mathbb{N}} \big\{ (n+q)^2 \mathbb{P}[T>n] \big\} \ &\leq \ \frac{1}{apq} \sup_{l\in\mathbb{N}} \big\{ \big(2l+1+q\big)^2 \mathbb{P}[T>2l] \big\} .
\end{aligned} \tag{9}$$

En utilisant à nouveau la question 2, on en conclut que le sup sur l est fini. Donc le membre de gauche de (9) tend vers 0 quand $a \to \infty$. Cela démontre (6). Ainsi, $M_{n\wedge T} \to M_T$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et, en particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_T] . \tag{10}$$

Remarque : c'était la question difficile du DS, bravo si vous l'avez résolue!

6. D'après la question 1 et un résultat du cours (cf. devoir à la maison), $n \wedge T$ est un temps d'arrêt borné de $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$. Le théorème d'arrêt pour les martingales permet alors de conclure que $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}|\mathcal{F}_0] = M_0$, d'où $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0]$. Mais $\mathbb{E}[M_0] = p^{-1}\mathbb{E}[1_{\{X_0 \in A\}}] = 1$. Compte-tenu de (10), en passant à la limite $n \to \infty$ dans ces égalités on obtient $\mathbb{E}[M_T] = 1$. On en déduit grâce à l'identité (5) que

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p} \, \mathbb{P}[X_T \in A] + \frac{1}{pq} - 1 = \begin{cases} \dfrac{1}{pq} - 1 & \text{si } A \cap B = \emptyset \\[2ex] \dfrac{1+q}{pq} - 1 & \text{si } B \subset A. \end{cases} \tag{11}$$