Devoir surveillé du mercredi 30 avril 2008 (durée : 1 heure 30)

Documents autorisés (à l'exclusion de tout autre document) : *polycopié de cours, notes de cours et de travaux dirigés.*

Exercice 1.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de $\mathcal{F}$.
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)$-martingale *régulière* (c'est-à-dire fermable) de limite presque sûre M_∞.
Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires entières positives telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

(i) T_k est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et

(ii) $T_k \leq T_{k+1}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_{T_k}$ la tribu des événements antérieurs à T_k et on pose :

$$X_k = M_{T_k} \ .$$

1. Les tribus $\mathcal{F}_{T_k}$, $k \in \mathbb{N}$, forment-elles une filtration de $\mathcal{F}$? Justifiez votre réponse.
2. Montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_{T_k})_{k\in\mathbb{N}}$ - martingale.
3. Montrer que $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\,|X_k|\,] \leq \mathbb{E}[\,|M_\infty|\,] < \infty$ et que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement et dans L^1 vers la variable aléatoire $X_\infty = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{G}]$, où $\mathcal{G}$ est la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_k}$.

Exercice 2.
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ telle que les variables aléatoires indépendantes de même loi $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, sont *centrées et de variance finie* $\mathrm{var}(X_n) = \sigma^2$, avec $0 < \sigma < \infty$. On associe à tout réel positif $c > 0$ la variable aléatoire :

$$T = \inf\big\{n \in \mathbb{N}^\star \ ; \ |S_n| > c\sqrt{n}\ \big\} \ .$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{E}[T] < \infty$ si et seulement si $c < \sigma$.

1. Montrer que T est un temps d'arrêt de la filtration naturelle $(\mathcal{F}^S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que $\mathbb{E}[T] < \infty$. En utilisant l'identité de Wald $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[T]$ (cf. exercice 8, feuille de TD 4), montrer que $c < \sigma$.
3. On suppose à présent que $\mathbb{E}[T] = \infty$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit

$$T_n = T \wedge n = \inf\{T, n\} \qquad \text{et} \qquad Y_n = (X_{T_n})^2 \ .$$

   (a) Démontrer l'inégalité

$$\mathbb{E}[S^2_{T_n}] \leq \mathbb{E}[S^2_{T_n-1}] + 2\Big(\mathbb{E}[S^2_{T_n-1}]\,\mathbb{E}[Y_n]\Big)^{1/2} + \mathbb{E}[Y_n] \ .$$

   En déduire que

$$\sigma^2 \ < \ c^2 + 2\,c\left(\frac{\mathbb{E}[Y_n]}{\mathbb{E}[T_n]}\right)^{1/2} + \frac{\mathbb{E}[Y_n]}{\mathbb{E}[T_n]} \ . \qquad (1)$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, $k \leq n$. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y_n] \leq \varepsilon\, \mathbb{E}[T_n] + (k-1)\,\sigma^2 + \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}[T_n \geq j]\, \mathbb{E}[X_j^2\, 1_{\{X_j^2 > \varepsilon j\}}]\ . \tag{2}$$

Indication : Utiliser $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y_n\, 1_{\{Y_n \leq \varepsilon T_n\}}] + \mathbb{E}[Y_n\, 1_{\{Y_n > \varepsilon T_n\}}]$.

(c) Montrer que l'on peut trouver un entier $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $n \geq k$,

$$\sum_{j=k}^{n} \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}[T_n = i]\, \mathbb{E}[X_j^2\, 1_{\{X_j^2 > \varepsilon j\}}] \ \leq\ \varepsilon\, \mathbb{E}[T_n]\ . \tag{3}$$

Indication : on pourra utiliser le fait que $\lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}[X_j^2\, 1_{\{X_j^2 > \varepsilon j\}}] = 0$ (à démontrer).

(d) Déduire des inégalités (2) et (3) que $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n]}{\mathbb{E}[T_n]} = 0$ et en conclure que $\sigma \leq c$.