Université Joseph Fourier
Master1, mathématiques

Algèbre 2, examen
le 18 mai 2015, de 9h à 12h

Aucun document ni téléphone n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée; la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies. On peut traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes.

Exercice

Soit G un groupe abélien fini. On se donne un élément f de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$. On considère l'endomorphisme $\Phi_f : u \mapsto f * u$ de $\mathbb{C}[G]$.

1. Expliciter $\Phi_f(\delta_g)$ $(g \in G)$ dans la base $\mathcal{B} = (\delta_h)_{h\in G}$ de $\mathbb{C}[G]$.

2. Pour tout χ dans le groupe dual $\widehat{G}$, calculer la transformée de Fourier de $f * \chi$.

3. En déduire que les éléments de $\widehat{G}$ sont vecteurs propres pour Φ_f.

4. Montrer que $\det(\Phi_f) = \prod_{\chi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)$.

5. a) On prend $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$. Expliciter les éléments de $\widehat{G}$. En notant $f(\bar{l}) = a_l$ $(0 \leq l \leq n-1)$, expliciter la matrice A de Φ_f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Donner la définition de la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}$ en $a = (a_l)_{0\leq l\leq n-1}$ et exprimer $\det(A)$ en fonction de $\mathcal{F}(a)$. Estimer en fonction de n le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $\det(A)$ avec la FFT.

Problème

Partie I

Soient G et G' deux groupes finis. On note Γ le groupe produit $G \times G'$, et $p : \Gamma \to G$ resp. $p' : \Gamma \to G'$ les deux morphismes de projection.

1. Soient (V, ρ) (resp. (V', ρ')) une représentation irréductible de G (resp. G'). On note respectivement χ et χ' leur caractère. Construire deux représentations (V, ρ_Γ) et (V', ρ'_Γ) du groupe Γ, de caractères respectifs $\Xi = \chi \circ p$ et $\Xi' = \chi' \circ p'$.

2. Montrer que $\Xi \cdot \Xi'$ est le caractère d'une représentation de Γ à expliciter.

Dans la suite, on note $\chi_1 \ldots, \chi_h$ les caractères irréductibles de G, et $\chi'_1 \ldots, \chi'_{h'}$ les caractères irréductibles de G'. On pose $I = \{1, \ldots, h\} \times \{1, \ldots, h'\}$. Pour (i, i') dans I, on note $\Xi_{ii'}$ le caractère $\Xi_i \cdot \Xi'_{i'}$ de Γ défini comme en 2) à partir des caractères χ_i et $\chi'_{i'}$.

T.S.V.P.

3. a) Rappeler la structure d'espace hermitien sur l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions centrales sur Γ.

b) Montrer que pour (i, i') dans I, les $\Xi_{ii'}$ sont des caractères irréductibles de Γ, et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

c) Donner le degré $n_{ii'}$ de $\Xi_{ii'}$ $((i, i') \in I)$. Calculer $\sum_{(i,i')\in I} n_{ii'}^2$. Conclure que tout caractère irréductible de Γ est l'un des $\Xi_{ii'}$.

Partie II

Soient G un groupe fini et (W, ρ) une représentation irréductible de G, de caractère χ. On pose $d = \dim W$. Par la partie I (2 et 3b)), on sait que pour tout entier $m \geq 2$, il existe (W_m, ρ_m) représentation *irréductible* du groupe produit $G^m = G \times G \times \ldots \times G$ (m facteurs), dont le caractère noté χ_m vérifie

$$\chi_m(g) = \prod_{i=1}^{m} \chi(g_i), \text{ pour tout } g = (g_i)_i \text{ dans } G^m .$$

1. Décrire en terme de $\chi(g)$ les $g \in G$ tels que $\rho(g)$ soit une homothétie, resp. tels que $\rho(g) = \mathrm{id}_W$.

On note Z le centre de G, et pour tout $m \geq 2$, Z_m celui de G^m. On note c l'ordre de Z. Dans la suite, m désigne un entier ≥ 2.

2. Montrer qu'il existe un caractère φ du groupe dual $\widehat{Z}$ tel que $\rho(g) = \varphi(g)\mathrm{id}_W$, pour tout $g \in Z$.

3. a) Expliciter le centre Z_m en fonction de Z.

b) Soit $g = (g_i)_i \in Z_m$. Déduire de 1) et 2) que $\chi_m(g) = \chi_m(1) \prod_{i=1}^m \varphi(g_i)$ (ici 1 désigne l'élément neutre de G^m).

4. On considère $H = \{h = (h_1, \ldots, h_m) \in Z_m \,|\, h_1 \cdots h_m = 1_G\}$.
Montrer que H est un sous–groupe distingué de G^m. Montrer que son cardinal est c^{m-1}.

5. Montrer avec 3) que H est inclus dans $\mathrm{Ker}\, \rho_m$.

6. En déduire une représentation irréductible de dimension d^m du groupe G^m/H.

7. Donner l'ordre de G^m/H. En notant x le rationnel quotient de $[G : Z]$ par d, montrer que $cx^m \in \mathbb{Z}$, pour tout entier $m \geq 2$.

8. En faisant tendre m vers l'infini, en déduire que $x \in \mathbb{Z}$.

9. Énoncer le résultat ainsi démontré.

◇◇◇