Université Joseph Fourier
Master1, mathématiques

Algèbre 2, devoir surveillé n°1

le 11 mars 2010, de 13h30 à 15h

Aucun document n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée.

I

On note V un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension 3 et B une base de V. On définit:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \,|\, \forall v \in B \ \varphi(v) \in B\}, \\ G_2 &= \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \,|\, \forall v \in B \ \varphi(v) \in B \text{ ou } -\varphi(v) \in B\} \text{ et} \\ G_3 &= \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \,|\, \forall v \in B \ \varphi(v) \in \{v, -v\}\}. \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $\rho_i \colon G_i \to \mathrm{GL}(V)$ l'inclusion.

a) Déterminer le cardinal de G_1 et G_3.

b) Parmi les groupes G_1, G_2 et G_3, lesquels sont abéliens?

c) Décrire toutes les sous–représentations de (V, ρ_1) de dimension 1.

d) Décrire toutes les sous–représentations de (V, ρ_3) de dimension 1.

e) Montrer que (V, ρ_2) est irréductible.

f) Existe–t–il $f \in \mathrm{Hom}_{G_3}(V, V)$ dont la matrice dans B ne soit pas diagonale?

II

Soient G un groupe fini et V une représentation de G (sur $\mathbb{C}$, de dimension finie). Montrer que l'algèbre $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ est commutative si et seulement si V est somme directe de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.

III

Soient G un groupe fini et χ un caractère de G. On définit la fonction $\chi^{(2)} \colon g \mapsto \chi(g^2)$ de G dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\chi^{(2)}$ est une fonction centrale.

b) Si G est abélien, montrer que $\chi^{(2)}$ est un caractère de G.

T.S.V.P.

c) (G quelconque) Justifier à l'aide du cours que $\chi^{(2)}$ est la différence de deux caractères de G.

d) Dans cette question, on prend pour G le groupe $\mathfrak{S}_3$ et pour χ le caractère de la représentation standard associée. La fonction $\chi^{(2)}$ est–elle un caractère de $\mathfrak{S}_3$?

On dit qu'une fonction $f\colon G \to \mathbb{C}$ est *réelle* si f prend toutes ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

e) On suppose que χ est irréductible et non réel. Evaluer $(\chi^2, 1)$. En déduire avec c) que $\sum_{g \in G} \chi^{(2)}(g) = 0$.

f) On suppose que χ est irréductible et réel. Montrer de même que $\sum_{g \in G} \chi^{(2)}(g)$ vaut $\pm |G|$.

◇◇◇◇◇